



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
Curso de Engenharia Civil
Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas



**ANÁLISE DE LAJES RETANGULARES À FLEXÃO CONSIDERANDO O ACRÉSCIMO DE
ARMADURA DEVIDO AOS MOMENTOS VOLVENTES.**

ANDRÉ PIMENTA CELESTE

Projeto de Graduação apresentado ao corpo docente do Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Aprovado por:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos (Orientador)
Professor Associado, D. Sc., EP/UFRJ

Claudia Ribeiro Eboli (Co-orientador)
Professor Associado, D. Sc., EP/UFRJ

Henrique Innecco Longo
Professor Associado, D. Sc., EP/UFRJ

Março / 2011

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Sérgio Hampshire de Carvalho Santos, pelos conselhos, pela paciência e pelos ensinamentos durante toda a minha vida acadêmica.

À minha co-orientadora, Prof.^a Claudia Ribeiro Eboli, pela paciência, pelo tempo dedicado e pela parceria durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ao Prof. Henrique Innecco Longo, pelos ensinamentos, nas matérias de Estruturas de Concreto Armado e pela participação nesta banca.

À minha família, pelo apoio incondicional e necessário para que eu concluísse a graduação. Em especial ao meu Pai, Sergio Celeste, engenheiro civil que me inspirou profissionalmente e pelo exemplo de vida. À minha mãe, Fátima pelos bons conselhos e por sempre me incentivar.

À minha companheira Bruna que sempre me apoiou e esteve ao meu lado desde o início da faculdade.

Ao meu Chefe Cleber Loureiro por mostrar que ser um bom profissional de engenharia não se resume a fazer cálculos, mas ter bom senso e harmonia no trabalho e por ser um exemplo de líder.

A todos meus amigos da ELTEC, minha segunda escola de Engenharia, tão importante quanto a UFRJ.

Aos amigos que sempre me incentivaram e torceram por mim.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

1. Introdução	4
2. Correção de momentos em lajes	8
2.1. Metodologia de correção de momentos em lajes	8
2.2. Método de Wood.....	9
3. Cálculo dos esforços solicitantes em lajes	19
3.1. Método dos elementos finitos	19
3.2. Tabelas de Czerny	21
4. Estudo de painéis de lajes de concreto armado retangulares	24
4.1. Dados do projeto	24
4.2. Modelagem dos painéis de laje	26
4.3. Saída de dados.....	28
4.4. Análise dos dados.....	34
4.4.1. Esforços solicitantes nos cantos	35
4.4.2. Esforços solicitantes nas lajes.	42
4.5. Dimensionamento da Armadura de Flexão.....	54
4.6. Recomendações de Detalhamento de Armadura.....	55
5. Conclusão	58
Referências e Bibliografia:	60
Anexo 1	61

Resumo

Este trabalho aborda a necessidade de se considerar o momento volvente no cálculo da armadura principal, inferior e superior, quando dispostas ortogonalmente nas faces de lajes finas, retangulares, de concreto armado.

Utilizando-se “software” de modelagem de malhas em elementos finitos, fez-se um estudo de lajes com diferentes relações de vão e condições de apoio. Os dados extraídos do programa foram comparados com resultados de tabelas baseadas na Teoria da Elasticidade.

Foi realizado o estudo em 4 tipos de cantos possíveis, analisados os momentos fletores nas direções principais e o trio de momentos fletores M_{11} , M_{22} e M_{12} na direção das armaduras, sofreram correção considerando o momento volvente, pelo método de Wood. Com os valores obtidos neste estudo foi possível definir o acréscimo de armadura e a região a ser coberta nos cantos.

Também foi realizado o estudo com diferentes relações de vão e para os vários tipos de apoio possíveis, onde se comparou a proporção de momentos fletores corrigidos nos diversos pontos da laje com os momentos fletores máximos do vão. Também se comparou a proporção do momento fletor sem a correção com o corrigido.

O dimensionamento da armadura foi realizado e representado em forma de gráficos de necessidade de armadura. Recomendações de detalhamento de armadura foram também apresentadas.

1. Introdução

Sob o ponto de vista estrutural, lajes são placas de concreto e estas são elementos estruturais de superfície plana, em que a dimensão perpendicular à superfície, usualmente chamado de espessura, é relativamente pequena comparada às demais, comprimento e largura, e sujeita principalmente a ações normais ao seu plano. Quando a relação de vãos das lajes continuamente apoiadas é menor ou igual a dois, costuma-se considerar, para efeitos de cálculo, que a laje é armada em duas direções.

Nas lajes armadas em duas direções, sob ação de carga normal ao seu plano distribuída uniformemente e com dois dos seus bordos adjacentes apoiados, existe a tendência ao levantamento de canto do suporte. Havendo restrição ao levantamento de canto, surge um momento principal positivo na diagonal e um momento principal negativo, perpendicular à diagonal. Na Figura 1.1 pode-se observar o comportamento das deformações, das reações de apoio e as direções dos momentos principais próximo aos cantos das placas com e sem a restrição ao levantamento. Pela convenção, as setas ($\rightarrow\leftarrow$) indicam a direção e a intensidade dos momentos principais negativos e setas ($\leftarrow\rightarrow$) indicam a direção e a intensidade dos momentos principais positivos.

O dimensionamento de lajes de concreto armado segundo os valores dos momentos principais e dispondo as armaduras segundo as direções principais tem pouco sentido prático, uma vez que para cada ponto da laje existem duas direções principais perpendiculares diferentes. Para maior eficiência define-se um sistema de eixos fixo para o qual as armaduras serão dispostas e os esforços serão calculados em geral paralelamente aos bordos. No caso de lajes retangulares foram admitidas as direções X_1 e X_2 paralelas aos bordos e X_3 perpendicular ao plano. No novo sistema de coordenadas, os momentos principais resultam no terno de esforços M_{11} , M_{22} , chamados de momentos fletores e M_{12} , usualmente chamado momento volvente.

A maneira mais correta de calcular lajes de concreto armado é considerar todos os esforços atuantes, incluindo, além dos momentos fletores, o momento volvente. Para tanto se faz necessário um estudo que permita determinar momentos normais às duas direções ortogonais escolhidas, que cubram o terno de esforços calculados, para que, a partir destes, sejam determinadas as armaduras necessárias à laje, dispostas segundo estas direções.

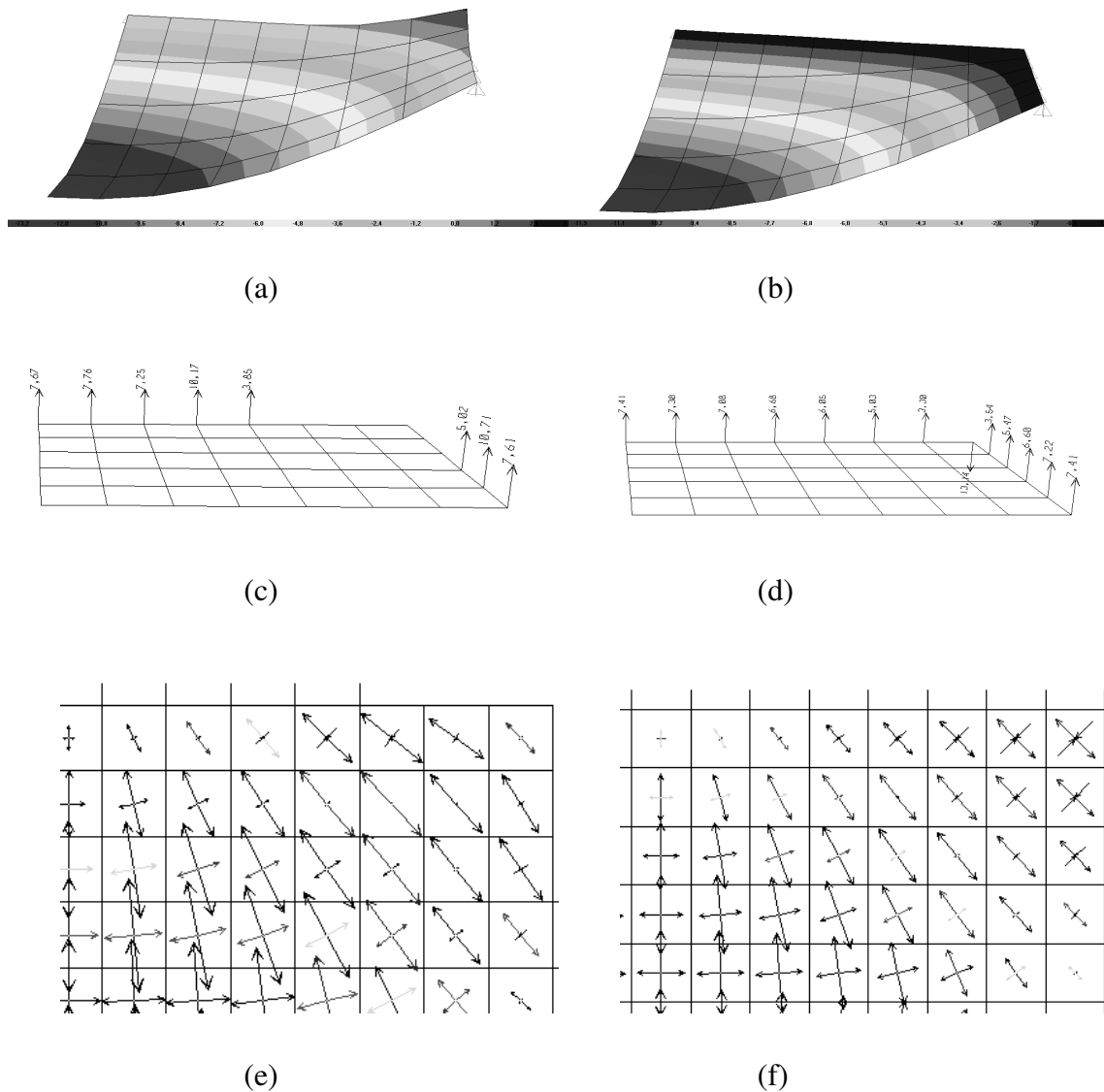


Figura 1 – (a) e (b) Deformações, (c) e (d) reações de apoio, (e) e (f) direção e intensidade dos momentos principais, sem e com restrição ao levantamento. [7]

Quando as solicitações de canto não são consideradas no dimensionamento da armadura, podem ocorrer fissuras nos bordos, ver Figura 1.2, aumentando as solicitações e deformações na região central. Lajes desse tipo quando ocorre colapso, ele se dá por ruptura por flexão, devido às solicitações do concreto em duas direções.

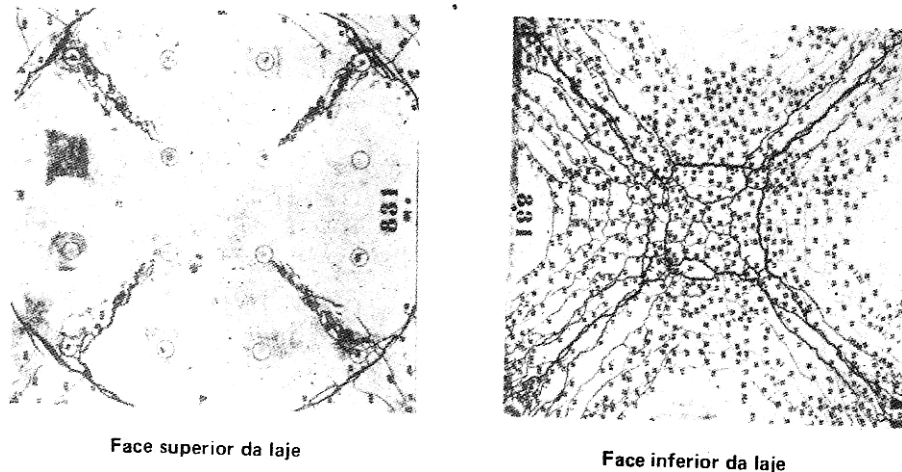


Figura 1.2 – Configuração de fissuras de uma laje de concreto armado retangular sob carga uniforme no estado de ruptura [6]

No capítulo 2 é estudado o método de Wood, que permite que, em cada ponto, os momentos fletores na direção da armadura sofram o acréscimo decorrente do momento torçor. Utilizaremos o método de Wood em forma de algoritmo, automatizando uma tabela de cálculo.

No capítulo 3 serão apresentados os métodos de cálculo utilizados para se obter os esforços solicitantes. Serão apresentados os passos necessários para a entrada e saída de dados do programa baseado em elementos finitos utilizado e o método de cálculo das tabelas baseadas na Teoria da Elasticidade utilizadas para validar os resultados obtidos.

No capítulo 4 são apresentados:

- Os dados utilizados no projeto;
- Os modelos matemáticos baseados em elementos finitos e suas discretizações;

- A comparação entre os esforços solicitantes extraídos do modelo em elementos finitos com os esforços solicitantes obtidos através de tabelas;
- Estudo do acréscimo e localização de armadura nos cantos das lajes;
- Estudo do acréscimo de armadura em todos os pontos das lajes, relacionando os momentos fletores corrigidos nesses pontos com o momento fletor corrigido do vão e comparando os momentos fletores corrigidos com os momentos fletores sem correção, na direção da armadura;
- Dimensionamento das armaduras solicitantes e a geração de gráficos de necessidade de armadura;
- Recomendações de detalhamento de armaduras baseado no estudo realizado.

No capítulo 5 são apresentados os comentários finais bem como as conclusões.

2. Correção de momentos em lajes

2.1. Metodologia de correção de momentos em lajes

Para o dimensionamento de armadura em lajes de concreto armado, solicitadas à flexão, é necessário o conhecimento dos momentos principais dispostos na direção da armadura na laje. Diversos métodos foram propostos para a correção de momentos fletores e volventes.

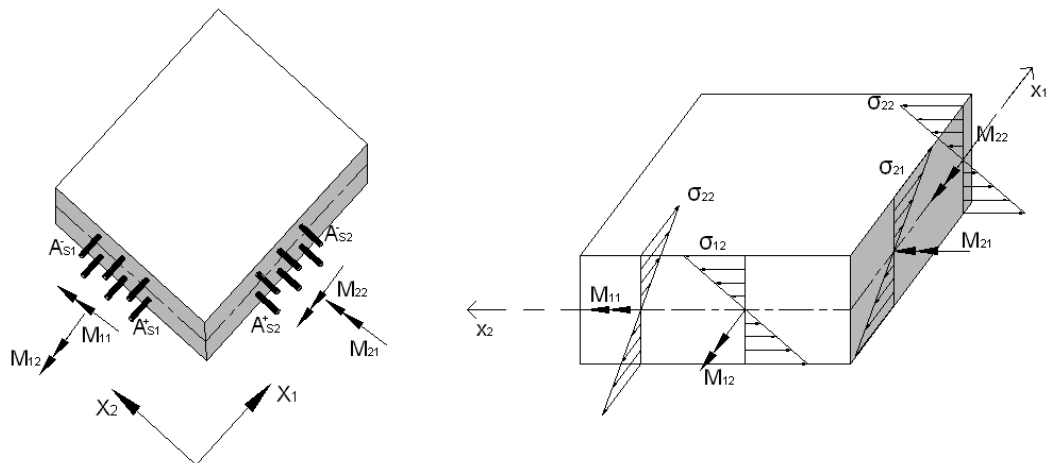


Figura 2.1 - Esforços sollicitantes, tensões e armadura segundo direção X_1 e X_2 .

No presente trabalho utilizaremos o método de Wood, que de forma simples e racional, apresenta o dimensionamento de placas solicitadas por esforços de flexão baseado no critério de resistência do momento normal, conhecido como critério de Johansen ou critério de linhas de plastificação.

O método de Wood consiste em uma aproximação numérica que visa determinar a quantidade mínima de armadura necessária à laje para que em uma seção qualquer, em um ponto da mesma, com direção arbitrária, a componente normal do momento último resistente, resulte sempre maior ou igual à componente normal do momento sollicitante, nesta seção.

2.2. Método de Wood

Esse método foi desenvolvido com equações para o caso de armadura com barras distribuídas ortogonalmente. Para obter estas equações, a diferença entre a componente normal do momento solicitante e a componente normal do momento resistente último deve ser minimizada, para que então as equações obtidas tenham como indeterminação a direção da linha de plastificação ou rótula plástica, sendo resolvida minimizando-se a quantidade de armadura.

A formulação de Wood não considera a atuação de esforços de membrana. Sua aplicação é bastante simples e utiliza somente os momentos solicitantes e fornece momentos resistentes últimos nas direções das barras de armadura, para os quais estas podem ser dimensionadas como em um caso de flexão simples. O método também não considera o aumento de resistência do concreto devido à compressão biaxial e a reserva de resistência do concreto devido ao cálculo da laje em regime elástico. Esses aspectos trazem vantagem, no sentido de conduzir a maior segurança.

Apesar do artigo de Wood ter sido publicado há mais de 40 anos, poucas foram as críticas contrárias à utilização do método, sendo ele encontrado em várias bibliografias que adotam o método para correção dos momentos principais na direção das armaduras.

2.2.1. Minimização da diferença entre a componente normal do momento solicitante e do momento resistente último.

A minimização da diferença entre a componente normal do momento solicitante (M_n) e a componente normal do momento resistente último (M_n^*) deve ser feita de forma que o esforço resistente seja maior ou igual ao solicitante.

$$f(\theta) = M_n^* - M_n \geq 0 \quad (2.1)$$

No critério de Johansen, assume-se que as armaduras estão dispostas em direções ortogonais X_1 e X_2 , tanto para o bordo inferior quanto para o bordo superior da laje. Assume-se também que a linha de escoamento real, que forma um ângulo θ com a direção X_2 , é definida como a linha no plano da laje onde as rotações plásticas ocorrem, através da qual as

barras estão escoando e a seção de concreto atingindo a plastificação. Esta linha de escoamento pode ser idealizada através de uma linha fictícia de forma escalonada.

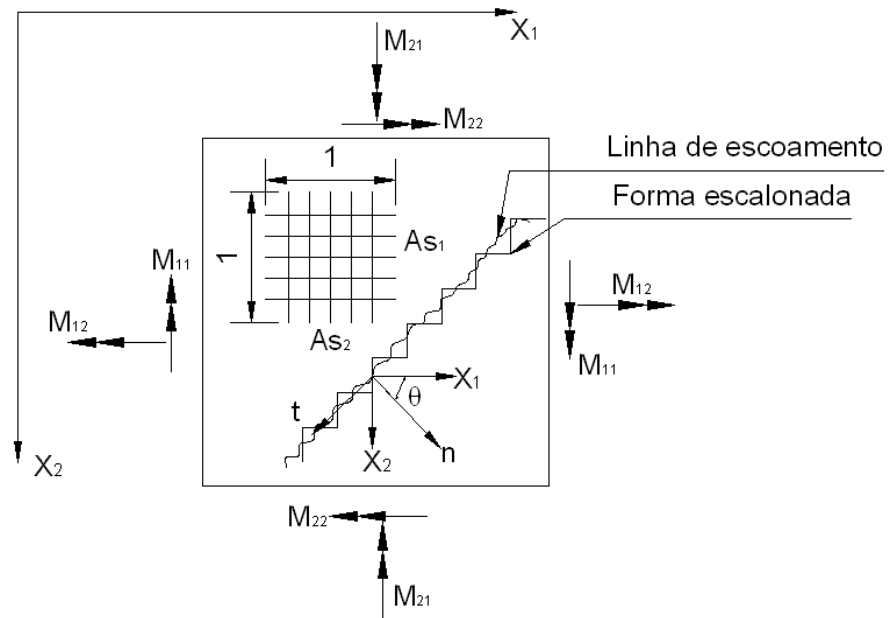


Figura 2.2 - Elemento de laje com campo geral de momentos solicitantes e linha de escoamento.

Para que seja atendido o critério com relação ao comportamento plástico, a percentagem de armadura deve ser suficientemente pequena para que a placa não rompa pelo esmagamento do concreto, as forças cisalhantes não exerçam efeitos apreciáveis na ruptura da placa e os esforços de membrana não tenham influência considerável no colapso da placa.

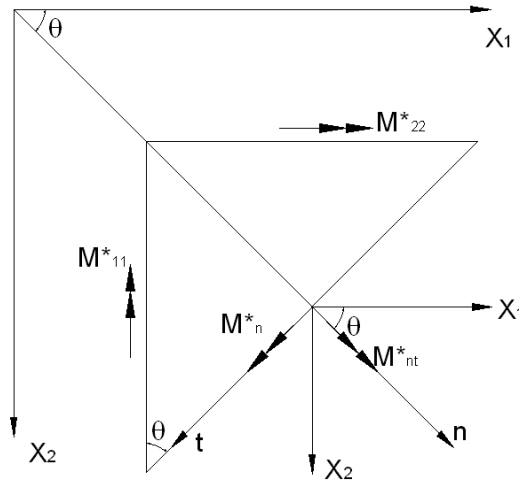


Figura 2.3 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal de laje na linha de escoamento sob os momentos resistentes últimos, para armadura ortogonal.

O momento resistente normal último atuando na direção “n” ao longo da linha de escoamento (Figura 2.3), que faz um determinado ângulo com as direções das armaduras, é encontrado por considerações de equilíbrio em um elemento infinitesimal.

O momento resistente último (M_n^*) pode ser escrito da seguinte forma:

$$M_n^* = M_{11}^* \cdot \cos^2 \theta + M_{22}^* \cdot \sin^2 \theta \quad (2.2)$$

O equilíbrio do elemento requer a existência de um momento de torção resistente último (M_{nt}^*) ao longo da linha de escoamento. Este pode ser escrito da forma:

$$M_{nt}^* = (M_{11}^* - M_{22}^*) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (2.3)$$

De modo análogo, determinam-se os momentos solicitantes:

$$M_n = M_{11} \cdot \cos^2 \theta + M_{22} \cdot \sin^2 \theta - M_{12} \cdot \sin 2\theta \quad (2.4)$$

$$M_{nt} = (M_{11} - M_{22}) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + M_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.5)$$

Para lajes armadas em ambos os bordos (inferior e superior), basta considerá-los separadamente, pois a superfície de escoamento de Johansen é referenciada às linhas de escoamento positivas e negativas.

Para o bordo inferior, tem-se a linha de escoamento positiva:

$$MP'_n = MP'_{11} \cdot \cos^2 \theta + MP'_{22} \cdot \sin^2 \theta \quad (2.6)$$

Para o bordo superior, tem-se a linha de escoamento negativa:

$$MP''_n = MP''_{11} \cdot \cos^2 \theta + MP''_{22} \cdot \sin^2 \theta \quad (2.7)$$

Onde MP'_n e MP'_{22} são momentos resistentes positivos provenientes de armaduras situadas no bordo inferior e MP''_{11} e MP''_{22} são momentos resistentes negativos provenientes de armaduras situadas no bordo superior.

Adotando $MP'_n = MP_n^*$ e $MP''_n = -MP_n^*$ e considerando-se as equações (2.1) e (2.2) chega-se a:

$$M_{11}^* \cdot \cos^2 \theta + M_{22}^* \cdot \sin^2 \theta - (M_{11} \cdot \cos^2 \theta + M_{22} \cdot \sin^2 \theta - M_{12} \cdot \sin 2\theta) \geq 0 \quad (2.7)$$

Dividindo a equação (2.7) por $\cos 2\theta$, sendo $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e $k = \tan\theta$ chega-se a:

$$f(k) = M_{11}^* + M_{22}^* \cdot k^2 - M_{11} - M_{22} \cdot k^2 + 2k \cdot M_{12} \geq 0 \quad (2.8)$$

Onde $f(k)$ representa o excesso de momento normal resistente.

2.2.2. Momento de dimensionamento para as armaduras.

A seguir, serão deduzidas as expressões dos momentos de dimensionamento para as armaduras.

i. Momento de dimensionamento da armadura positiva.

Para este caso, os momentos normais serão sempre positivos, então a equação (2.8) pode ser expressa por:

$$f(k) = M'_{11} + M'_{22} \cdot k^2 - M_{11} - M_{22} \cdot k^2 + 2k \cdot M_{12} \geq 0 \quad (2.9)$$

Para que haja minimização do excesso de momento normal resistente:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 f(k)}{\partial \theta^2} > 0 \quad (2.11)$$

Da equação (2.10), se obtém:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial f(k)}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial \theta} = \frac{\partial f(k)}{\partial k} = \sec^2 \theta \quad (2.12)$$

Como o termo $\sec^2 \theta$ é sempre diferente de zero, tem-se:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(k)}{\partial k} = 0 \quad (2.13)$$

Aplicando-se então, a equação (2.13) em (2.9) chega-se a:

$$2M'_{22} \cdot k - 2M_{22} \cdot k + 2M_{12} = 0 \quad (2.14)$$

Simplificando a equação (2.14), obtém-se o momento para o dimensionamento da direção X_2 :

$$M'_{22} = M_{22} - \frac{1}{k} M_{12} \quad (2.15)$$

Substituindo a equação (2.15) em (2.9):

$$M'_{11} = M_{11} - k \cdot M_{12} = 0 \quad (2.16)$$

Aplicando a equação (2.11) em (2.9):

$$M'_{22} \geq M_{22} \quad (2.17)$$

Para atender à equação (2.15) e (2.17)

$$\frac{1}{k} M_{12} \leq 0 \quad (2.18)$$

Sabemos que M_{12} e k possuem sinais contrários. Assim, considerando-se a equação (2.18), as equações (2.16) e (2.15) podem ser escritas, respectivamente como:

$$M'_{11} = M_{11} + K \cdot M_{12} = 0 \quad (2.19)$$

$$M'_{22} = M_{22} + \frac{1}{K} \cdot |M_{12}| = 0 \quad (2.20)$$

Onde:

$$K = |k| = |\tan\theta| \quad (2.21)$$

Admitindo-se que a diferença entre os braços de alavanca para as armaduras nas direções X_1 e X_2 seja desprezível, a armadura total será aproximadamente proporcional à soma de MP_{11} e MP_{22} . Desprezar esta diferença corresponde a adotar a hipótese de que o momento é proporcional à armadura. Assim,

$$MP'_{11} + MP'_{22} = M_{11} + K \cdot |M_{12}| + M_{22} + \frac{1}{K} \cdot |M_{12}| \quad (2.22)$$

Como o objetivo é encontrar uma armadura mais econômica, temos que minimizar a expressão da armadura total (2.22). Isto equivale a obter um valor para $K=|k|$, tal que torne mínima a expressão:

$$\frac{\partial}{\partial K} (MP'_{11} + MP'_{22}) = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial K} \left(M_{11} + M_{22} + \left(K + \frac{1}{K} \right) \cdot |M_{12}| \right) = 0$$

logo,

$$\left(1 + \frac{1}{K^2} \right) \cdot |M_{12}| = 0 \quad (2.23)$$

resultando em:

$$K=1 \quad (2.24)$$

Pela equação (2.21),

$$\Theta_{cr}=45^\circ \quad (2.25)$$

Fisicamente, Θ_{cr} corresponde à posição da linha de escoamento (ou charneira plástica), em relação às direções das armaduras, que conduzirá ao dimensionamento mais econômico.

Assim, os momentos resistentes para o dimensionamento das armaduras no bordo inferior da laje (armadura positiva) serão dados, considerando-se $K=1$, por:

$$M'_{11} = M_{11} + |M_{12}| \quad (2.26.a)$$

$$M'_{22} = M_{22} + |M_{12}| \quad (2.26.b)$$

ii. Momentos de dimensionamento da armadura negativa.

Procedendo-se de maneira análoga ao item “i.” chega-se à:

$$M''_{11} = M_{11} + |M_{12}| \quad (2.27.a)$$

$$M''_{22} = M_{22} + |M_{12}| \quad (2.27.b)$$

iii. Momentos de dimensionamento das armaduras positivas ou negativas com sinais contrários.

Existem casos aonde as equações (2.26) e (2.7) conduzem a momentos de dimensionamento com sinais contrários, ou seja, pode-se encontrar para armadura positiva, momentos negativos e vice-versa. Isso se deve ao fato do critério de escoamento de Johansen não considerar a possibilidade dos momentos últimos terem sinais contrários.

A solução que Wood sugeriu para contornar o problema foi a adoção de um valor de k que anule o momento com sinal conflitante. O novo valor seria utilizado para a determinação do momento resistente na outra direção.

Se após as correções ainda houver discrepância de sinais, uma nova correção deve ser realizada até que os sinais fiquem coerentes.

A anulação do momento de dimensionamento significa que é dispensável o uso de armaduras na direção deste momento para o bordo em análise. Seria como tentar combater fissuração no bordo inferior com armadura negativa ou o contrário.

A correção para o bordo inferior da laje, associada à armadura positiva e momentos positivos:

Se $MP'_{11} < 0$, adota-se

$$MP'_{11} = 0 \quad (2.28.a)$$

Substituindo na equação (2.16), logo:

$$k = \frac{M_{11}}{M_{12}}, \quad K = \left| \frac{M_{11}}{M_{12}} \right|$$

Aplicando à equação (2.20):

$$MP'_{22} = M_{22} + \left| \frac{M_{12}^2}{M_{11}} \right| \quad (2.28.b)$$

Se pela equação (2.28.b) $MP'_{22} < 0$ então, nova correção é necessária:

$$MP'_{22} = 0 \quad (2.28.c)$$

Se $MP'_{22} < 0$, adota-se

$$MP'_{22} = 0 \quad (3.29.a)$$

Substituindo na equação (2.15), logo:

$$k = \frac{M_{12}}{M_{22}}, \quad K = \left| \frac{M_{12}}{M_{22}} \right|$$

Aplicando à equação (2.19):

$$MP'_{11} = M_{11} + \left| \frac{M_{12}^2}{M_{22}} \right| \quad (2.29.b)$$

Se pela equação (2.29.b) $MP'_{11} < 0$ então, nova correção é necessária:

$$MP'_{11} = 0 \quad (2.29.c)$$

A correção para o bordo superior da laje, associado à armadura negativa e momentos negativos:

Se $MP''_{11} > 0$, adota-se:

$$MP''_{11} = 0 \quad (2.30.a)$$

Logo,

$$MP''_{22} = M_{22} - \left| \frac{M_{12}^2}{M_{11}} \right| \quad (2.30.b)$$

Se pela equação (2.30.b) $MP''_{22} < 0$ então, aplica-se nova correção:

$$MP''_{22} = 0 \quad (2.30.c)$$

Se $MP''_{22} < 0$, adota-se:

$$MP''_{22} = 0 \quad (2.31.a)$$

Logo,

$$MP''_{11} = M_{11} - \left| \frac{M_{12}^2}{M_{22}} \right| \quad (2.31.b)$$

Se pela equação (2.31.b) $MP''_{11} < 0$ então, aplica-se nova correção:

$$MP''_{11} = 0 \quad (2.31.c)$$

2.2.3. Algoritmo para utilização do Método de Wood

Considerando a aplicação do método de Wood, é possível criar um algoritmo que corrige as solicitações dos momentos m_{11} , m_{22} e m_{12} para solicitações equivalentes em forma de momentos positivos e negativos nas direções X_1 e X_2 automaticamente, como veremos a seguir.

Face inferior: armadura de tração calculada para resistir os momentos (m^*_{11} ; m^*_{22})

$$\text{calcular } m'_{11} = m_{11} + |m_{12}| \quad m'_{22} = m_{22} + |m_{12}|$$

testar:

1. Se $m'_{11} \geq 0$ e $m'_{22} \geq 0$ então $m^*_{11} = m'_{11}$ e $m^*_{22} = m'_{22}$ (fim)
2. Se $m'_{11} < 0$ e $m'_{22} < 0$ então $m^*_{11} = 0$ e $m^*_{22} = 0$ (fim)
3. Se $m'_{11} < 0$ então $m^*_{11} = 0$ e $m^*_{22} = \text{Máximo} (m_{22} + |m_{12}|^2 / m_{11}| ; 0)$ (fim)
4. Se $m'_{22} < 0$ então $m^*_{22} = 0$ e $m^*_{11} = \text{Máximo} (m_{11} + |m_{12}|^2 / m_{22}| ; 0)$ (fim)

Face superior: armadura de tração calculada para resistir os momentos (m^*_{11} ; m^*_{22})

$$\text{calcular } m''_{11} = m_{11} - |m_{12}| \quad m''_{22} = m_{22} - |m_{12}|$$

testar:

1. Se $m''_{11} \leq 0$ e $m''_{22} \leq 0$ então $m^*_{11} = m''_{11}$ e $m^*_{22} = m''_{22}$ (fim)
2. Se $m''_{11} > 0$ e $m''_{22} > 0$ então $m^*_{11} = 0$ e $m^*_{22} = 0$ (fim)
3. Se $m''_{11} > 0$ então $m^*_{11} = 0$ e $m^*_{22} = \text{Mínimo} (m_{22} - |m_{12}|^2 / m_{11}| ; 0)$ (fim)
4. Se $m''_{22} > 0$ então $m^*_{22} = 0$ e $m^*_{11} = \text{Mínimo} (m_{11} - |m_{12}|^2 / m_{22}| ; 0)$ (fim)

3. Cálculo dos esforços solicitantes em lajes

O cálculo de momentos fletores em lajes pode ser efetuado por meio de tabelas, baseadas em algum tipo de simplificação da Teoria da Elasticidade, pelo Método das Linhas de Ruptura (charneiras plásticas), ou numericamente com auxílio computacional, por processos como o Método dos Elementos Finitos.

Neste trabalho, será utilizado um programa de elementos finitos, o SAP2000[7], que permite a análise de diversos problemas estruturais.

A comparação dos esforços solicitantes obtidos através deste “software” será feita através das tabelas de CZERNY[2], que são tabelas semi-empíricas baseadas na Teoria da Elasticidade.

3.1. Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos pode ser definido como um procedimento geral de discretização de problemas contínuos, definidos por expressões definidas matematicamente. O processo de discretização é feito de acordo com o seguinte princípio: o meio contínuo é dividido em um número finito de partes (elementos), cujo comportamento se especifica em função de um número finito de parâmetros.

Neste trabalho o Método dos Elementos Finitos foi utilizado na modelagem das lajes, através da discretização utilizando elementos de placa fina resistindo somente a esforços de flexão. Esse modelo foi utilizado, pois apresenta resultados mais próximos dos reais.

A seguir serão descritos os passos necessários para a entrada de dados e a obtenção dos resultados.

- Primeiramente deve-se dividir a estrutura em um conjunto de elementos finitos adequados à solução do problema. No caso do SAP2000, para análise de lajes, o programa dispõe de elementos denominados SHELL, que são elementos adequados para solucionar problemas de placas, cascas e membranas em duas e em três dimensões. O elemento SHELL, tipo “Plate-Thin” é associado ao elemento de placa fina. Portanto, o elemento de casca

apresenta, somente, as tensões de flexão de uma placa, que produzem momentos fletores e torsores.

- Os elementos SHELL, utilizados neste trabalho, possuem elementos de 4 nós de formulação isoparamétrica, e não incluem deformação por cisalhamento (elemento de placa fina).

- O comportamento de placa inclui duas componentes de rigidez rotacional fora do plano e uma componente de rigidez à translação na direção normal ao plano do elemento, não incluindo nenhum efeito de deformação por cisalhamento (elemento de placa fina).

- Os dados são fornecidos, neste caso, graficamente. Primeiro deve ser fornecida a malha, e posteriormente são definidos os tipos de elementos a serem utilizados (membrana, placa ou casca), os parâmetros mecânicos dos elementos, tais como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e os parâmetros geométricos, como a espessura do elemento.

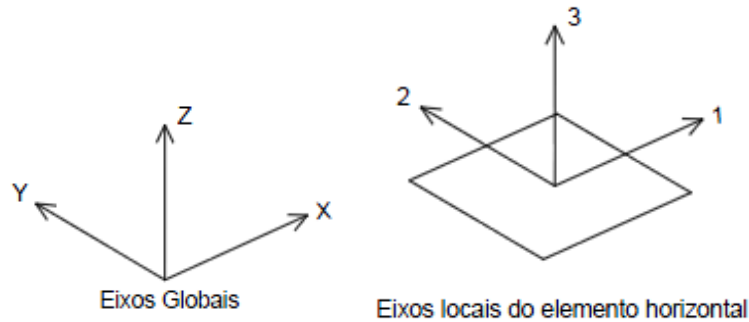
- Em seguida devem-se definir as restrições nodais, ou seja, os graus de liberdade impedidos dos nós da estrutura que são considerados vínculos ou apoios.

- As cargas aplicadas nos elementos SHELL são definidas diretamente na tela. Neste trabalho todas as cargas existentes na laje, peso próprio, carga permanente e sobrecarga, foram consideradas uniformemente distribuídas na sua superfície a fim de que, em todos os exemplos, a carga aplicada fosse a mesma, para que se pudesse comparar os resultados.

- Após a entrada de dados, o programa faz a montagem do modelo com seus parâmetros e inicia a solução montando a matriz de rigidez da estrutura. Em seguida, resolve o sistema de equações lineares para a obtenção dos deslocamentos nodais.

- Os resultados dos esforços e deslocamentos podem ser obtidos através da listagem de arquivos de saídas numéricas ou diretamente na tela (saídas gráficas). Para estas saídas de dados, o programa utiliza uma convenção

de sistema de coordenadas locais para cada elemento, com eixos 1, 2 e 3 e um sistema global X, Y e Z, sendo ambos orientados pela regra da mão-direita. O sistema de coordenadas global é definido arbitrariamente, mas neste trabalho o eixo Z positivo é orientado na vertical para cima e o plano X e Y é horizontal. A orientação dos eixos locais 1, 2 e 3, adotada neste trabalho, é mostrada na Figura 3.1.



Figuras 3.1 - Coordenadas globais e locais dos elementos do SAP2000

3.2. Tabelas de Czerny

As tabelas de Czerny podem ser aplicadas em todas as situações de lajes retangulares com carregamento uniformemente distribuído, com lados perfeitamente apoiados ou engastados em seu contorno.

Para a aplicação das tabelas de Czerny, deve-se considerar que o vão menor é sempre l_x . Os momentos positivos e negativos nas duas direções das lajes são obtidos a partir de parâmetros obtidos nas tabelas, em função da relação dos vãos l_y / l_x , que vai de 1 a 2. As tabelas foram calculadas com base na Teoria da Elasticidade, supondo-se o coeficiente de Poisson nulo, fato que tem maior influência nas lajes com maior relação de vão.

Para obter os momentos fletores na laje é necessário selecionar o tipo segundo as condições de apoio (Figura 3.2), entrar com os dados do carregamento distribuído total na laje p , o comprimento menor vão l_x independentemente da direção do momento fletor que se deseja e com os parâmetros adimensionais m , obtidos nas tabelas (Figura 3.3). A seguir apresentam-se as fórmulas aplicadas.

Momento positivo no menor vão:

$$M_x^+ = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x}$$

Momento negativo no menor vão:

$$M_x^- = \frac{p \cdot l_x^2}{-m_x}$$

Momento positivo no maior vão:

$$M_y^+ = \frac{p \cdot l_y^2}{m_y}$$

Momento negativo no maior vão:

$$M_y^- = \frac{p \cdot l_y^2}{-m_y}$$

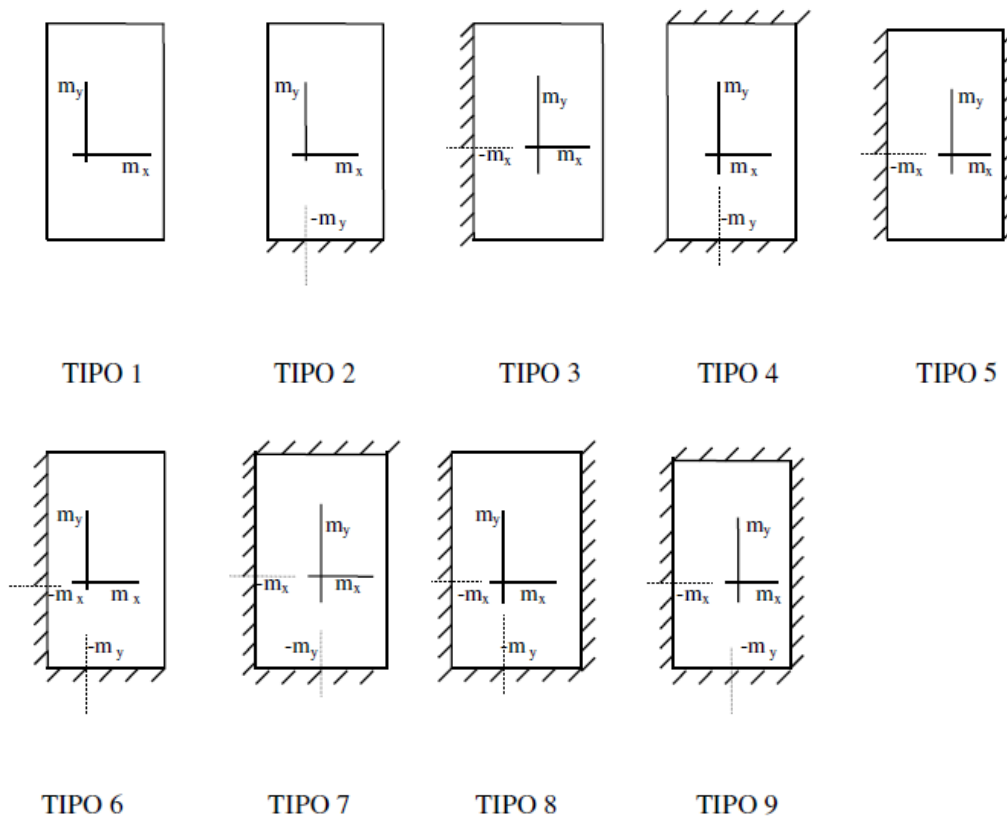


Figura 3.2 - Tipos de lajes em função de sua condição de apoio[3]

TIPO	1		2			3			4			5		
I_y / I_x	m_x	m_y	m_x	$-m_y$	m_y	$-m_x$	m_x	m_y	m_x	$-m_y$	m_y	$-m_x$	m_x	m_y
1,00	27,2	27,2	41,2	11,9	29,4	11,9	31,4	41,2	63,3	14,3	35,1	14,3	35,1	61,7
1,05	24,5	27,5	36,5	11,3	29,0	11,3	29,2	43,2	52,2	13,4	33,7	13,8	33,0	64,5
1,10	22,4	27,9	31,9	10,9	28,8	10,9	27,3	45,1	46,1	12,7	32,9	13,5	31,7	67,2
1,15	20,7	28,4	28,3	10,4	28,8	10,5	25,8	47,1	39,8	12,0	32,2	13,2	30,4	69,6
1,20	19,1	29,1	25,9	10,1	28,9	10,2	24,5	48,8	35,5	11,5	31,7	13,0	29,4	71,5
1,25	17,8	29,9	23,4	9,8	29,2	9,9	23,4	50,3	31,5	11,1	31,3	12,7	28,5	72,8
1,30	16,8	30,9	21,7	9,6	29,7	9,7	22,4	51,8	28,5	10,7	31,2	12,6	27,8	73,5
1,35	15,8	31,8	20,1	9,3	30,2	9,4	21,6	53,2	25,8	10,3	31,2	12,4	27,1	74,1
1,40	15,0	32,8	18,8	9,2	30,8	9,3	21,0	54,3	23,7	10,0	31,4	12,3	26,6	74,6
1,45	14,3	33,8	17,5	9,0	31,6	9,1	20,3	55,0	22,0	9,75	31,7	12,2	26,1	75,3
1,50	13,7	34,7	16,6	8,9	32,3	9,0	19,8	55,6	20,4	9,5	32,1	12,2	25,8	75,8
1,55	13,2	35,4	15,7	8,8	33,0	8,9	19,4	56,2	19,0	9,3	32,7	12,1	25,4	76,5
1,60	12,7	36,1	15,0	8,7	33,6	8,8	19,0	56,8	17,9	9,2	33,3	12,0	25,2	77,0
1,65	12,3	36,7	14,3	8,6	34,3	8,7	18,6	57,3	16,9	9,05	34,0	12,0	24,9	77,0
1,70	11,9	37,3	13,8	8,5	34,9	8,6	18,3	57,8	16,0	8,9	34,9	12,0	24,7	77,0
1,75	11,5	37,9	13,2	8,45	35,6	8,5	18,0	58,2	15,2	8,8	35,9	12,0	24,5	77,0
1,80	11,3	38,5	12,8	8,4	36,2	8,4	17,8	58,6	14,6	8,7	37,1	12,0	24,4	77,0
1,85	11,0	38,9	12,3	8,35	36,9	8,3	17,5	58,8	13,9	8,6	38,3	12,0	24,3	77,0
1,90	10,8	39,4	12,0	8,3	37,5	8,3	17,4	59,0	13,4	8,5	39,7	12,0	24,3	77,0
1,95	10,6	39,8	11,6	8,25	38,2	8,3	17,2	59,1	12,9	8,4	41,1	12,0	24,2	77,0
2,00	10,4	40,3	11,4	8,2	38,8	8,3	17,1	59,2	12,5	8,4	42,4	12,0	24,1	77,0

TIPO	6				7				8				9			
I_y / I_x	$-m_x$	m_x	$-m_y$	m_y	$-m_x$	m_x	$-m_y$	m_y	$-m_x$	m_x	$-m_y$	m_y	$-m_x$	m_x	$-m_y$	m_y
1,00	14,3	40,2	14,3	40,2	18,3	59,5	16,2	44,1	16,2	44,1	18,3	55,9	19,4	56,8	19,4	56,8
1,05	13,3	38,0	13,8	41,0	16,6	51,6	15,4	43,6	15,3	40,5	17,9	57,5	18,2	50,6	18,8	58,2
1,10	12,7	35,1	13,6	42,0	15,4	46,1	14,8	43,7	14,8	37,9	17,7	60,3	17,1	46,1	18,4	60,3
1,15	12,0	32,2	13,3	42,9	14,4	41,4	14,3	44,2	14,2	35,5	17,6	64,2	16,3	42,4	18,1	62,6
1,20	11,5	30,0	13,1	44,0	13,5	37,5	13,9	44,8	13,9	33,8	17,5	66,2	15,5	39,4	17,9	65,8
1,25	11,1	28,0	12,9	45,6	12,7	34,2	13,5	45,8	13,5	32,3	17,5	67,7	14,9	37,0	17,7	69,4
1,30	10,7	26,5	12,8	47,6	12,2	31,8	13,3	46,9	13,2	31,0	17,5	69,0	14,5	34,8	17,6	73,6
1,35	10,3	25,2	12,7	49,6	11,6	29,6	13,1	48,6	12,9	29,9	17,5	70,5	14,0	33,3	17,5	78,4
1,40	10,0	24,1	12,6	51,0	11,2	28,0	13,0	50,3	12,7	29,0	17,5	72,0	13,7	31,9	17,5	83,4
1,45	9,8	23,1	12,5	52,1	10,9	26,4	12,8	52,3	12,6	28,2	17,5	73,4	13,4	30,6	17,5	89,4
1,50	9,6	22,2	12,4	53,0	10,6	25,2	12,7	55,0	12,5	27,6	17,5	75,2	13,2	29,6	17,5	93,5
1,55	9,4	21,6	12,3	54,1	10,3	24,2	12,6	58,2	12,4	27,0	17,5	76,9	13,0	28,8	17,5	96,1
1,60	9,2	21,0	12,3	54,8	10,1	23,3	12,6	61,6	12,3	26,5	17,5	78,7	12,8	28,1	17,5	98,1
1,65	9,1	20,4	12,2	55,6	9,9	22,5	12,5	65,6	12,2	26,1	17,5	80,5	12,7	27,5	17,5	99,9
1,70	8,9	19,9	12,2	56,3	9,7	21,7	12,5	70,4	12,2	25,7	17,5	82,5	12,5	26,9	17,5	101
1,75	8,8	19,5	12,2	57,0	9,5	21,1	12,4	75,0	12,1	25,3	17,5	84,6	12,4	26,4	17,5	102
1,80	8,7	19,1	12,2	57,7	9,4	20,5	12,4	79,6	12,1	25,1	17,5	86,8	12,3	26,0	17,5	103
1,85	8,6	18,7	12,2	58,3	9,2	20,0	12,3	84,7	12,0	24,9	17,5	89,2	12,2	25,7	17,5	104
1,90	8,5	18,4	12,2	59,0	9,0	19,5	12,3	89,8	12,0	24,7	17,5	91,7	12,1	25,4	17,5	105
1,95	8,4	18,1	12,2	59,6	8,9	19,1	12,3	95,4	12,0	24,6	17,5	94,3	12,0	25,2	17,5	105
2,00	8,4	17,9	12,2	60,2	8,8	18,7	12,3	101	12,0	24,5	17,5	97,0	12,0	25,0	17,5	105

Figura 3.3: Tabela de parâmetros adimensionais de Czerny.

4. Estudo de painéis de lajes de concreto armado retangulares

4.1. Dados do projeto

O presente trabalho tem como objetivo estudar, baseado nas teorias apresentadas até aqui, os efeitos do momento volvente em lajes retangulares usuais de concreto armado, com relações de vão 1:1, 1:1,5, 1:2 e considerando as nove condições possíveis de apoio.

a) Dimensões

Os painéis de laje têm as seguintes dimensões:

$$5\text{m} \times 5\text{m} \rightarrow 1:1,0$$

$$5\text{m} \times 7,5\text{m} \rightarrow 1:1,5$$

$$5\text{m} \times 10\text{m} \rightarrow 1:2,0$$

de modo que a menor dimensão l_x se mantém fixa.

A espessura adotada foi de 0,10m, equivalente a $l/50$.

b) Materiais

- **Concreto**

Resistência característica à compressão:

$$f_{ck} = 30\text{MPa}$$

Coefficiente de Poisson:

$$\nu = 0,2$$

Módulo de elasticidade secante:

$$E_{cs} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 26071\text{MPa}$$

Peso específico aparente do concreto armado:

$$\gamma_c = 25\text{kN/m}^3$$

- **Aço**

CA-50 - Alta aderência

Resistência ao escoamento característica:

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$$

Módulo de elasticidade:

$$E_s = 210 \text{ GPa}$$

c) Critérios de Projeto

Classe de Agressividade Ambiental:

CAA-II, moderada, urbana

Relação água/cimento

$$A/C \leq 0,60$$

Cobrimento nominal:

$$C_{\text{nom}} = 25 \text{ mm}$$

Limite para fissuração:

$$\text{ELS-W, } w_k = 0,3 \text{ mm}$$

d) Carregamento

Adotado segundo a NBR6120:1980 [10], típico para estruturas de edifícios:

$$\text{Peso próprio } (g_1) = 2,5 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Revestimento } (g_2) = 1,0 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Carga acidental } (q) = 2,5 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Carregamento } (g+q) = 6,0 \text{ kN/m}^2$$

e) Combinação

A NBR8681:2007[11] permite que o coeficiente de ponderação para combinações últimas γ_f , seja aplicado diretamente ao esforço característico, desde que o cálculo dos esforços solicitantes seja feito em regime elástico linear. Desta forma:

$$S_d = \gamma_f S_k$$

Para o dimensionamento à flexão simples foi utilizada a combinação última com o mesmo coeficiente de ponderação para solicitações permanentes e para solicitações variáveis: $\gamma_f = \gamma_q = \gamma_g = 1,4$. Então:

$$S_d = 1,4 \cdot S_k$$

4.2. Modelagem dos painéis de laje

Foram modelados painéis de laje com três relações de vão para as nove condições possíveis de apoio de bordos, totalizando vinte e quatro modelos, pois para a relação de vãos igual a 1,0 se igualam as lajes do tipo 2 e 3, tipo 4 e 5 e tipo 7 e 8. A seguir, é definida a discretização dos painéis de laje para as três relações de vão em forma de tabela e graficamente.

DISCRETIZAÇÃO DOS PAINÉIS DE LAJE				
l_y/l_x	DIMENSÕES	ELEMENTOS		NÓS
		DIMENSÕES	QUANTIDADE	
1,0	5,00X5,00	0,50X0,50	10X10	121
1,5	5,00X7,50	0,50X0,50	10X15	176
2,0	5,00X10,00	0,50X0,50	10X20	231

Tabela 4.1 – Discretização dos painéis de laje.

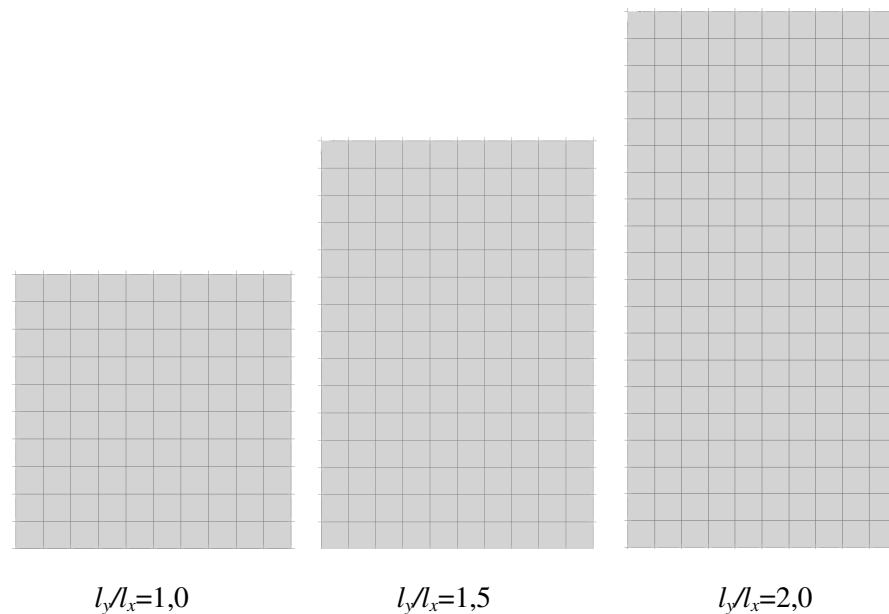


Figura 4.1 – Representação gráfica da discretização dos painéis de laje

As condições de apoio são definidas a partir de restrições aos deslocamentos (u_1, u_2, u_3) e/ou às rotações (r_1, r_2, r_3) nos nós do contorno, de acordo com o tipo de laje a ser estudada. Na Tabela 4.2 são mostradas as restrições nos bordos para cada tipo e na Figura 4.2 o menu de entrada das restrições dos nós do programa SAP2000.

RESTRIÇÕES DE DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES NOS BORDOS				
TIPO	BORDO			
	Superior	Direito	Inferior	Esquerdo
1	u_1, u_2, u_3	u_1, u_2, u_3	u_1, u_2, u_3	u_1, u_2, u_3
2	u_1, u_2, u_3	u_1, u_2, u_3	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	u_1, u_2, u_3
3	u_1, u_2, u_3	u_1, u_2, u_3	u_1, u_2, u_3	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$
4	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	u_1, u_2, u_3	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	u_1, u_2, u_3
5	u_1, u_2, u_3	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	u_1, u_2, u_3	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$
6	u_1, u_2, u_3	u_1, u_2, u_3	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$
7	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	u_1, u_2, u_3	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$
8	u_1, u_2, u_3	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$
9	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$	$u_1, u_2, u_3, r_1, r_2, r_3$

Tabela 4.2 – Tabela de restrições de deslocamento e rotações nos bordos dos painéis de laje segundo o tipo.

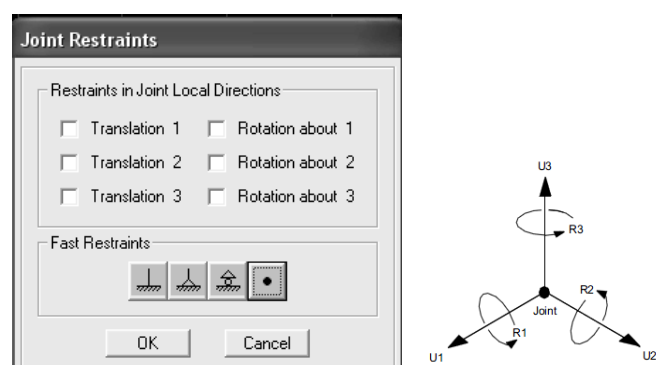
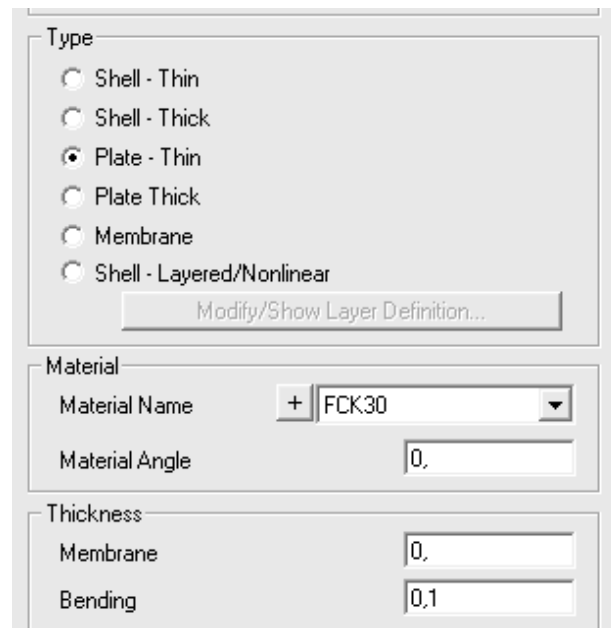


Figura 4.2 – “Menu” de entrada das restrições nodais e sistema local de coordenadas dos seis graus de liberdade utilizado pelo “software” SAP2000.

Para tornar o modelo mais próximo à teoria de placas finas, como definido no Capítulo 3, utilizou-se elementos do tipo “Plate-Thin”, considerando a espessura do elemento somente na resistência aos esforços de flexão e considerando espessura nula para os esforços de membrana. Na Figura 4.3 é possível observar o “menu” de definição da seção do elemento de placa do “software” SAP2000.



The image shows a dialog box for defining the section of an element in SAP2000. It is divided into three main sections: Type, Material, and Thickness. In the Type section, there are radio buttons for Shell - Thin, Shell - Thick, Plate - Thin (which is selected), Plate Thick, Membrane, and Shell - Layered/Nonlinear. Below these is a button labeled 'Modify/Show Layer Definition...'. The Material section contains a 'Material Name' field with a dropdown menu showing 'FCK30' and a '+' icon, and a 'Material Angle' field with the value '0.'. The Thickness section contains two fields: 'Membrane' with the value '0.' and 'Bending' with the value '0.1'.

Figura 4.3 - Entrada de dados da seção de área do “software” SAP2000.

4.3. Saída de dados

Os resultados dos esforços foram obtidos a partir de tabelas numéricas em que para cada nó são fornecidos sua localização, os momentos fletores M_{11} e M_{22} e o momento torçor M_{12} . Também é possível se obter resultados gráficos, mas estes serão utilizados apenas de forma qualitativa, expondo tendências de esforços em alguma região.

As tabelas de Czerny não fazem a correção do momento fletor na direção da armadura levando em conta o momento torçor na sua formulação, então a comparação é realizada somente entre os momentos fletores M_{11} e M_{22} .

LAJE TIPO 1 - 5,0 X 5,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,50	6,67	5,51	0,83
M22	0,50	0,50	6,67	5,51	0,83

LAJE TIPO 2 E 3 - 5,0 X 5,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,60	0,50	5,93	5,10	0,86
M22	0,60	0,50	4,81	3,64	0,76
M22	0,00	0,50	-12,44	-12,61	1,01

LAJE TIPO 4 E 5 - 5,0 X 5,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,50	4,89	4,27	0,87
M22	0,50	0,50	3,30	2,43	0,74
M22	0,00	0,50	-10,39	-10,49	1,01

LAJE TIPO 6 - 5,0 X 5,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,70	0,30	4,05	3,73	0,92
M22	0,70	0,30	4,05	3,73	0,92
M11	0,00	0,40	-10,25	-10,49	1,02
M22	0,60	1,00	-10,25	-10,49	1,02

LAJE TIPO 7 E 8 - 5,0 X 5,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,40	4,10	3,40	0,83
M22	0,50	0,40	3,45	2,68	0,78
M11	0,00	0,40	-9,07	-9,26	1,02
M22	0,50	1,00	-8,16	-8,20	1,00

LAJE TIPO 9 - 5,0 X 5,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,50	3,30	2,64	0,80
M22	0,50	0,50	3,30	2,64	0,80
M11	0,00	0,50	-7,64	-7,73	1,01
M22	0,50	0,00	-7,64	-7,73	1,01

Tabela 4.3 – Tabela comparativa dos momentos fletores $l_y/l_x=1,0$.

LAJE TIPO 1 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,53	11,77	10,95	0,93
M22	0,50	0,53	6,38	4,32	0,68

LAJE TIPO 2 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,47	10,14	9,04	0,89
M22	0,50	0,47	6,38	4,64	0,73
M22	0,50	1,00	-16,61	-16,85	1,01

LAJE TIPO 3 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,60	0,53	8,76	7,58	0,86
M22	0,60	0,53	3,76	2,70	0,72
M11	0,00	0,53	-16,50	-16,67	1,01

LAJE TIPO 4 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,53	8,36	7,35	0,88
M22	0,50	0,53	6,17	4,67	0,76
M22	0,50	0,00	-15,57	-15,79	1,01

LAJE TIPO 5 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,53	6,14	5,81	0,95
M22	0,50	0,53	2,12	1,98	0,93
M11	0,00	0,53	-12,22	-12,30	1,01

LAJE TIPO 6 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,60	0,40	7,90	6,76	0,86
M22	0,60	0,40	4,05	2,83	0,70
M11	0,00	0,47	-15,47	-15,63	1,01
M22	0,60	1,00	-11,81	-12,10	1,02

LAJE TIPO 7 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,60	0,47	7,13	5,88	0,83
M22	0,60	0,47	4,13	2,73	0,66
M11	0,00	0,47	-14,05	-14,15	1,01
M22	0,60	1,00	-11,54	-11,81	1,02

LAJE TIPO 8 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,47	5,89	5,43	0,92
M22	0,50	0,47	2,34	1,99	0,85
M11	0,00	0,47	-11,86	-12,00	1,01
M22	0,50	1,00	-8,44	-8,57	1,02

LAJE TIPO 9 - 5,0 X 7,5					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,47	5,50	5,07	0,92
M22	0,50	0,47	2,58	1,60	0,62
M11	0,00	0,47	-11,25	-11,36	1,01
M22	0,50	0,00	-8,42	-8,57	1,02

Tabela 4.4 – Tabela comparativa dos momentos fletores $l_y/l_x=1,5$.

LAJE TIPO 1 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,50	15,04	14,42	0,96
M22	0,50	0,50	5,49	3,72	0,68

LAJE TIPO 2 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,45	14,02	13,16	0,94
M22	0,50	0,45	5,74	3,87	0,67
M22	0,50	1,00	-17,98	-18,29	1,02

LAJE TIPO 3 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,60	0,50	9,99	8,77	0,88
M22	0,60	0,50	2,89	2,53	0,88
M11	0,00	0,50	-18,03	-18,07	1,00

LAJE TIPO 4 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,50	12,79	12,00	0,94
M22	0,50	0,50	5,91	3,54	0,60
M22	0,50	0,00	-17,64	-17,86	1,01

LAJE TIPO 5 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,50	6,43	6,22	0,97
M22	0,30	0,10	1,87	1,95	1,04
M11	0,00	0,50	-12,54	-12,50	1,00

LAJE TIPO 6 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,60	0,45	9,68	8,38	0,87
M22	0,60	0,45	3,10	2,49	0,80
M11	0,00	0,45	-17,64	-17,86	1,01
M22	0,60	1,00	-11,99	-12,30	1,03

LAJE TIPO 7 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,60	0,50	9,26	8,02	0,87
M22	0,60	0,50	3,32	1,49	0,45
M11	0,00	0,50	-17,08	-17,05	1,00
M22	0,60	1,00	-11,96	-12,20	1,02

LAJE TIPO 8 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M _{SAP} (kN.m/m)	M _{Czerny} (kN.m/m)	M _{Czerny} / M _{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,45	6,37	6,12	0,96
M22	0,50	0,45	1,64	1,55	0,94
M11	0,00	0,45	-12,48	-12,50	1,00
M22	0,50	1,00	-8,39	-8,57	1,02

LAJE TIPO 9 - 5,0 X 10,0					
TIPO DE MOMENTO	POSIÇÃO		M_{SAP} (kN.m/m)	M_{Czerny} (kN.m/m)	M_{Czerny} / M_{SAP}
	X	Y			
M11	0,50	0,50	6,27	6,00	0,96
M22	0,50	0,50	1,78	1,43	0,80
M11	0,00	0,50	-12,35	-12,50	1,01
M22	0,50	0,00	-8,40	-8,57	1,02

Tabela 4.5 – Tabela comparativa dos momentos fletores $l_y/l_x=2,0$.

É possível observar uma diferença significativa entre os resultados obtidos com o modelo de elementos finitos em relação às tabelas de Czerny. A maior diferença se dá nos resultados dos momentos positivos na direção X_2 , possivelmente pela consideração do coeficiente de Poisson igual a zero por Czerny. Nos momentos positivos na direção X_1 , a relação não superou 80% e nos momentos negativos a relação foi satisfatoriamente próxima.

4.4. ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados de saída do programa é apresentada na forma de dois estudos, o estudo da disposição das armaduras complementares nos cantos e o estudo da necessidade de armaduras complementares nos cantos.

No estudo de esforços solicitantes nos cantos, a partir dos momentos fletores nas direções principais, nos elementos próximos aos cantos, será calculado o terno de momentos na direção das armaduras e será realizada sua correção pelo método de Wood. Os valores corrigidos negativos serão comparados com o momento resistente da armadura mínima, definindo uma possível região para a distribuição de armadura complementar negativa nos cantos.

O estudo de esforços solicitantes nas lajes será mais abrangente, onde todos os nós dos modelos das lajes são avaliados. O terno de momentos fletores paralelos aos bordos é

corrigido pelo método de Wood e os momentos mais elevados dos cantos e os negativos são comparados com os momentos do vão.

Os dois estudos farão comparação dos momentos fletores solicitantes negativos de canto com o momento resistente proporcionado pelo uso da armadura mínima definida a seguir, para saber se existe a necessidade de armadura complementar negativa nos cantos.

$$\rho_{min} = 0,173\%$$

$$A_{s,min} = 10 \times 100 \times \frac{0,173}{100} = 1,73 \text{ cm}^2 / m$$

$$M_{r,min} = 3,66 \text{ kN.m} / m$$

Maiores detalhes sobre armadura mínima serão fornecidos no item 4.5.

4.4.1. Esforços solicitantes nos cantos

O objetivo de se estudar os cantos é o de encontrar padrões de comportamento em relação às condições de apoio dos bordos adjacentes, independentemente da relação de vão.

Será estudada a região próxima ao encontro dos bordos até uma distância de $0,5l_x$, onde é possível se observar a variação de intensidade do momento torçor no canto caracterizando o momento volvente.

O estudo dos momentos nas direções principais, juntamente com a formulação de mudança de referencial (4.1), servirá para entender o surgimento do terno de momentos M_{11} , M_{22} e M_{12} paralelos aos bordos.

$$\begin{aligned} M_{12} &= -M_{21} = -M_1 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + M_2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ M_{11} &= M_1 \cos^2 \alpha + M_2 \sin^2 \alpha \\ M_{22} &= M_1 \sin^2 \alpha + M_2 \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (4.1)$$

A preocupação principal deste estudo de cantos é quanto à disposição das armaduras negativas, já que as armaduras positivas serão verificadas posteriormente no estudo de necessidade de armadura na laje.

São estudados quatro tipos de cantos (ver Figura 4.4). São eles:

Canto C1 – Ambos os bordos apoiados

Canto C2 – Ambos os bordos engastados

Canto C3 – Maior bordo engastado, menor bordo apoiado.

Canto C4 – Maior bordo apoiado, menor bordo engastado.

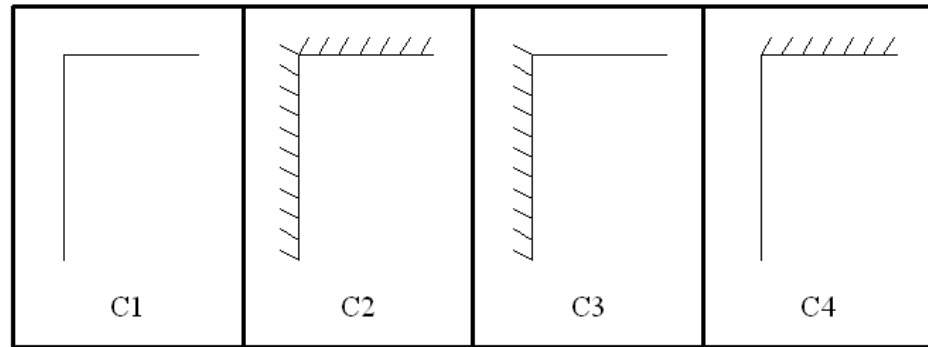


Figura 4.4 – Tipos de bordos estudados.

Alguns elementos foram escolhidos para o estudo. Para os elementos da família “i” alinhados horizontalmente, o momento negativo corrigido se caracteriza pelo momento M''_{22} . Para a família “j” alinhada verticalmente, pelo momento M''_{11} e para o elemento “0” o momento negativo corrigido acompanha o da família estudada. A localização do centro dos elementos é expressa em função da distancia “D” do bordo ao seu centro em razão de lx .

a) Cantos com ambos os bordos apoiados, C1.

Nove elementos desta região foram escolhidos para caracterizar os bordos deste tipo de canto, ver Figura 4.5.

0	i_1	i_2	i_3	i_4
j_1				
j_2				
j_3				
j_4				

Figura 4.5 – Elementos escolhidos para estudo dos cantos com bordos adjacentes apoiados.

Nessa região, próxima aos cantos, os momentos nas direções principais ocorrem em ângulo próximo a 45° com intensidade similar e sinais opostos, maximizando os momentos torçores M_{12} e M_{21} e minimizando os momentos fletores M_{11} e M_{22} , de acordo com a formulação (4.1).

A Figura 4.6 ilustra graficamente a direção principal e a intensidade dos momentos fletores.

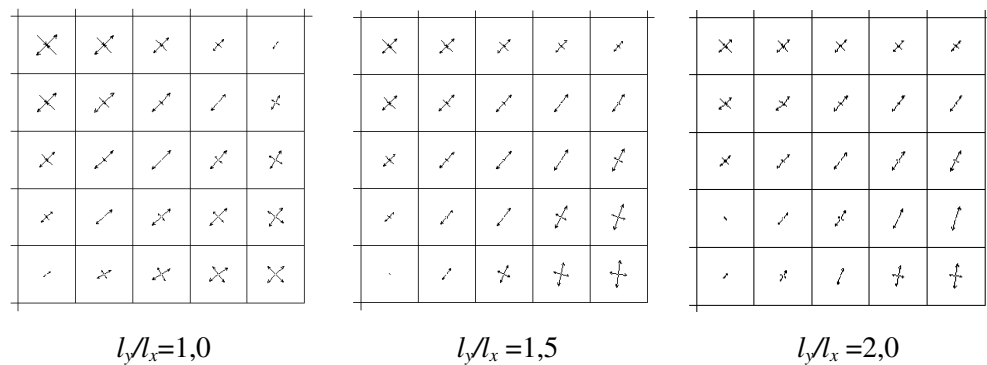


Figura 4.6 – Diagramas de orientação e intensidade dos momentos nas direções principais.

$l_y/l_x = 1,0$ - CANTO COM BORDOS APOIADOS											
Elem.	D/ l_x	DIREÇÃO PRINCIPAL			DIREÇÃO DA ARMADURA			CORRIGIDOS			
		$M_{MÁX}$	$M_{MÍN}$	α	M_{11}	M_{22}	M_{12}	M'_{11}	M'_{22}	M''_{11}	M''_{22}
0	0,05	6,72	-6,21	45,00	0,26	0,25	6,47	6,72	6,72	6,21	6,21
i1	0,15	6,21	-4,92	44,80	0,68	0,61	5,56	6,25	6,17	4,88	4,96
i2	0,25	5,06	-3,03	44,19	1,13	0,90	4,04	5,17	4,94	2,91	3,14
i3	0,35	3,6	-1,57	43,00	1,20	0,83	2,58	3,77	3,41	1,38	1,74
i4	0,45	1,97	0,19	38,09	1,29	0,87	0,86	2,16	1,73	0,00	0,00
j1	0,15	6,21	-4,92	45,20	0,61	0,68	5,56	6,17	6,25	4,96	4,88
j2	0,25	5,06	-3,3	45,81	0,76	1,00	4,18	4,94	5,18	3,42	3,18
j3	0,35	3,6	-1,57	47,00	0,83	1,20	2,58	3,41	3,77	1,74	1,38
j4	0,45	1,97	0,19	51,91	0,87	1,29	0,86	1,73	2,16	0,00	0,00

$I_y/I_x = 1,5$ - CANTO COM BORDOS APOIADOS											
Elem.	D/ l_x	DIREÇÃO PRINCIPAL			DIREÇÃO DA ARMADURA			CORRIGIDOS			
		$M_{MÁX}$	$M_{MÍN}$	α	M_{11}	M_{22}	M_{12}	M'_{11}	M'_{22}	M''_{11}	M''_{22}
0	0,05	7,25	-6,61	44,87	0,35	0,29	6,93	7,28	7,22	6,58	6,64
i1	0,15	6,87	-5,21	44,72	0,89	0,77	6,04	6,93	6,81	5,15	5,27
i2	0,25	5,74	-3,47	44,71	1,18	1,09	4,60	5,79	5,69	3,42	3,52
i3	0,35	4,19	-1,54	44,65	1,36	1,29	2,86	4,22	4,15	1,50	1,57
i4	0,45	2,39	0,44	44,18	1,44	1,39	0,97	2,42	2,36	0,00	0,00
j1	0,15	7,12	-5,46	44,42	0,96	0,70	6,29	7,25	6,99	5,33	5,59
j2	0,25	6,49	-4,18	43,62	1,41	0,90	5,33	6,74	6,23	3,92	4,43
j3	0,35	5,66	-2,91	42,50	1,75	1,00	4,27	6,02	5,27	2,52	3,27
j4	0,45	4,74	-1,69	40,78	2,00	1,05	3,18	5,18	4,23	1,18	2,13

$I_y/I_x = 2,0$ - CANTO COM BORDOS APOIADOS											
Elem.	D/ l_x	DIREÇÃO PRINCIPAL			DIREÇÃO DA ARMADURA			CORRIGIDOS			
		$M_{MÁX}$	$M_{MÍN}$	α	M_{11}	M_{22}	M_{12}	M'_{11}	M'_{22}	M''_{11}	M''_{22}
0	0,05	7,82	-7,17	44,84	0,37	0,28	7,49	7,86	7,78	7,13	7,21
i1	0,15	7,38	-5,7	44,60	0,93	0,75	6,54	7,47	7,29	5,61	5,79
i2	0,25	6,16	-3,84	44,44	1,26	1,06	5,00	6,26	6,06	3,74	3,94
i3	0,35	4,47	-1,18	44,09	1,73	1,56	2,82	4,56	4,38	1,09	1,27
i4	0,45	2,5	0,37	42,34	1,53	1,34	1,06	2,59	2,40	0,00	0,00
j1	0,15	7,73	-6,04	44,33	1,01	0,68	6,88	7,89	7,57	5,88	6,20
j2	0,25	7,18	-4,82	43,49	1,50	0,86	5,99	7,49	6,86	4,50	5,13
j3	0,35	6,47	-3,65	42,39	1,87	0,95	5,04	6,91	5,99	3,17	4,09
j4	0,45	5,72	-2,57	40,90	2,17	0,98	4,10	6,27	5,09	1,94	3,12

Tabela 4.6 – Tabela de cálculo dos momentos fletores corrigidos no canto de bordos apoiados.

A norma NBR 6118:2007[9] é omissa quanto à necessidade de acréscimo de armadura de canto necessária pela consideração do momento volvente. Segundo publicação do IBRACON [8] a armadura para momentos volvente deve se estender $0,2l_x$ a partir do eixo da viga e em Leonhardt ([5] e [6]) existe a recomendação de que essa armadura deve se estender em $0,3l_x$.

Analizando os dados marcados na Tabela 4.6 e comparando com momento resistente com a armadura mínima, pode-se concluir que para as relações de vãos estudadas, a disposição da armadura de canto até uma distância $0,25l_x$ é necessária nestes casos estudados.

b) Cantos com ambos os bordos engastados, C2.

Neste caso não há influência do momento volvente, pois as direções dos momentos principais ocorrem praticamente perpendiculares aos bordos, afastando o momento torçor da região de canto. A Figura 4.7 ilustra graficamente a direção principal e a intensidade dos momentos fletores.

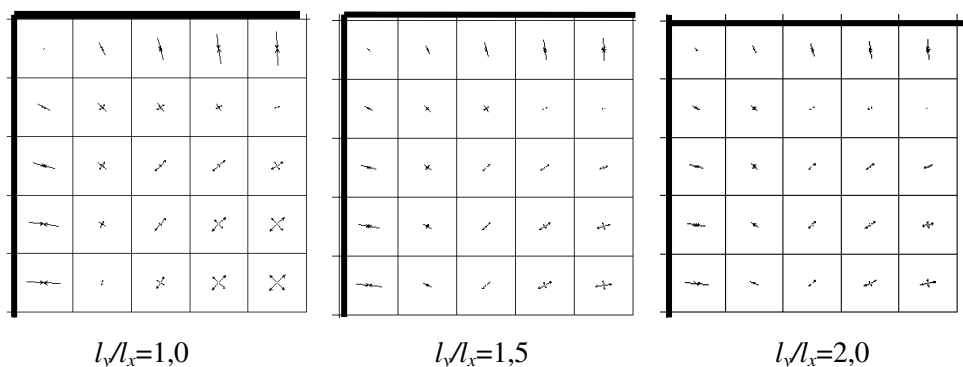


Figura 4.7 – Diagramas de orientação e intensidade dos momentos nas direções principais com dois bordos engastados.

c) Cantos com bordos engastados e apoiados.

Neste caso a influência do momento volvente se dá apenas no bordo apoiado, pois nos elementos do bordo engastado os momentos ocorrem nas suas direções principais perpendicularmente ao bordo. Na Figura 4.8 estão representados os elementos escolhidos para a análise.

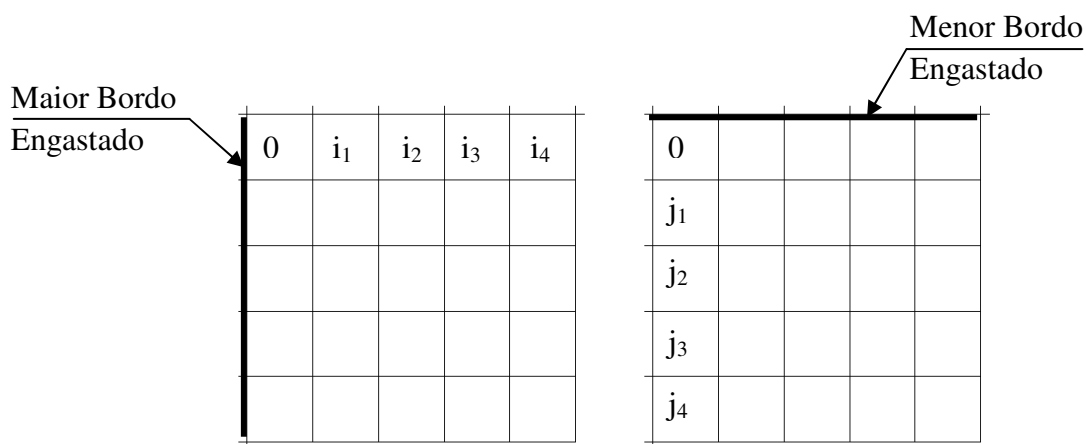


Figura 4.8 – Elementos escolhidos para estudo dos cantos com bordo maior engastado e bordo menor apoiado.

A Figura 4.9 ilustra graficamente a direção principal e a intensidade dos momentos fletores.

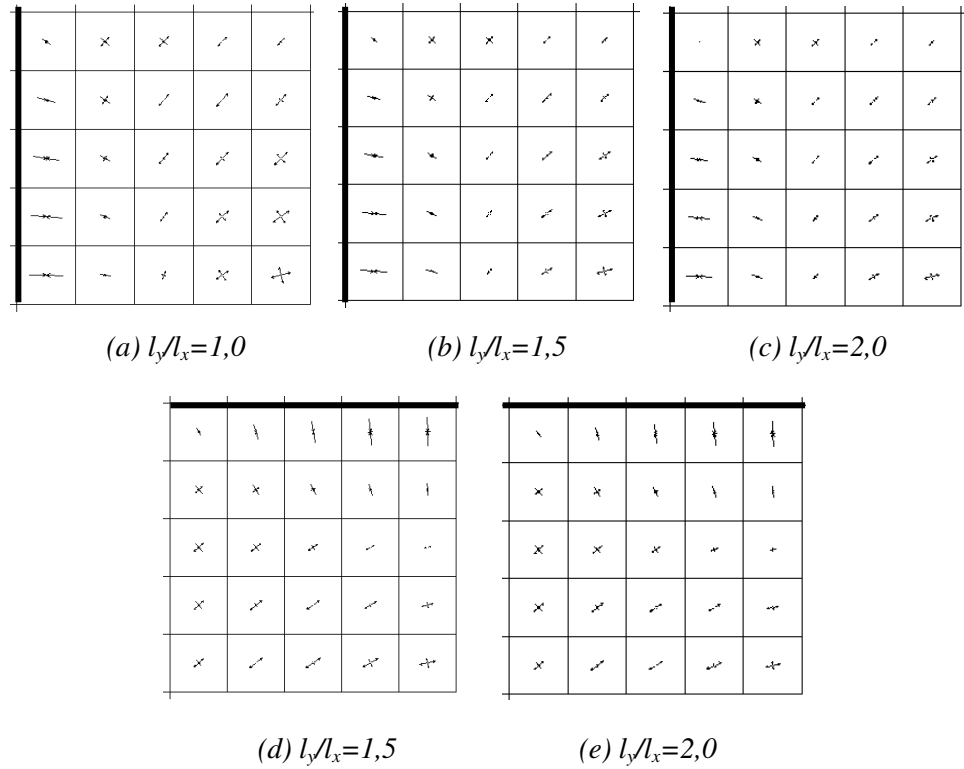


Figura 4.9 – Diagramas de orientação e intensidade dos momentos nas direções principais. (a) Bordos apoiado e engastado, (b) e (c) maior bordo engastado, (d) e (e) maior bordo apoiado.

$l_y/l_x = 1,0$ - CANTO COM BORDO ENGASTADO E BORDO APOIADO											
Elem.	D/l_x	DIREÇÃO PRINCIPAL			DIREÇÃO DA ARMADURA			CORRIGIDOS			
		$M_{MÁX}$	$M_{MÍN}$	α	M_{11}	M_{22}	M_{12}	M'_{11}	M'_{22}	M''_{11}	M''_{22}
0	0,05	0,72	-2,44	57,36	-1,52	-0,20	1,44	0,00	1,16	2,96	1,63
i1	0,15	2,87	-2,90	47,96	-0,31	0,28	2,87	2,56	3,15	3,18	2,59
i2	0,25	3,48	-2,49	46,67	0,32	0,67	2,98	3,30	3,65	2,66	2,31
i3	0,35	3,21	-1,57	46,51	0,69	0,95	2,39	3,08	3,33	1,69	1,44
i4	0,45	2,40	-0,38	47,21	0,90	1,12	1,39	2,29	2,50	0,48	0,27

$I_y/I_x = 1,5$ - CANTO COM MAIOR BORDO ENGASTADO E MENOR BORDO APOIADO											
Elem.	D/lx	DIREÇÃO PRINCIPAL			DIREÇÃO DA ARMADURA			CORRIGIDOS			
		M _{MÁX}	M _{MÍN}	α	M ₁₁	M ₂₂	M ₁₂	M' ₁₁	M' ₂₂	M'' ₁₁	M'' ₂₂
0	0,05	0,75	-2,67	57,38	-1,68	-0,24	1,55	0,00	1,19	3,23	1,80
i1	0,15	3,12	-3,30	47,93	-0,42	0,24	3,19	2,78	3,43	3,61	2,96
i2	0,25	3,86	-2,99	46,38	0,27	0,60	3,42	3,69	4,02	3,15	2,82
i3	0,35	3,60	-2,02	45,74	0,72	0,86	2,81	3,53	3,67	2,09	1,95
i4	0,45	2,70	-0,69	45,31	0,99	1,02	1,69	2,68	2,72	0,71	0,67

$I_y/I_x = 2,0$ - CANTO COM MAIOR BORDO ENGASTADO E MENOR BORDO APOIADO											
Elem.	D/lx	DIREÇÃO PRINCIPAL			DIREÇÃO DA ARMADURA			CORRIGIDOS			
		M _{MÁX}	M _{MÍN}	α	M ₁₁	M ₂₂	M ₁₂	M' ₁₁	M' ₂₂	M'' ₁₁	M'' ₂₂
0	0,05	0,75	-2,68	57,38	-1,68	-0,25	1,56	0,00	1,19	3,24	1,80
i1	0,15	3,13	-3,33	47,93	-0,43	0,23	3,21	2,78	3,44	3,64	2,98
i2	0,25	3,59	-3,03	46,35	0,12	0,44	3,31	3,43	3,74	3,18	2,87
i3	0,35	3,64	-2,08	45,66	0,71	0,85	2,86	3,57	3,71	2,15	2,01
i4	0,45	2,73	-0,74	45,10	0,99	1,00	1,73	2,72	2,74	0,75	0,73

$I_y/I_x = 1,5$ - CANTO COM MAIOR BORDO APOIADO E MENOR BORDO ENGASTADO											
Elem.	D/lx	DIREÇÃO PRINCIPAL			DIREÇÃO DA ARMADURA			CORRIGIDOS			
		M _{MÁX}	M _{MÍN}	α	M ₁₁	M ₂₂	M ₁₂	M' ₁₁	M' ₂₂	M'' ₁₁	M'' ₂₂
0	0,05	0,91	-3,27	32,50	-0,30	-2,06	1,89	1,44	0,00	2,19	3,96
j1	0,15	3,88	-4,29	41,66	0,27	-0,68	4,06	4,33	3,38	3,79	4,74
j2	0,25	5,13	-4,30	42,85	0,77	0,06	4,70	5,47	4,76	3,93	4,64
j3	0,35	5,38	-3,69	42,89	1,18	0,51	4,52	5,70	5,03	3,34	4,01
j4	0,45	5,04	-2,79	42,33	1,49	0,76	3,90	5,39	4,66	2,41	3,14

$I_y/I_x = 2,0$ - CANTO COM MAIOR BORDO APOIADO E MENOR BORDO ENGASTADO											
Elem.	D/lx	DIREÇÃO PRINCIPAL			DIREÇÃO DA ARMADURA			CORRIGIDOS			
		M _{MÁX}	M _{MÍN}	α	M ₁₁	M ₂₂	M ₁₂	M' ₁₁	M' ₂₂	M'' ₁₁	M'' ₂₂
0	0,05	0,98	-3,55	32,66	-0,34	-2,23	2,06	1,56	0,00	2,40	4,29
j1	0,15	4,22	-4,76	41,56	0,27	-0,81	4,46	4,73	3,65	4,19	5,27
j2	0,25	5,69	-4,94	42,74	0,79	-0,04	5,30	6,09	5,25	4,50	5,34
j3	0,35	6,15	-4,48	42,75	1,25	0,42	5,30	6,55	5,72	4,05	4,88
j4	0,45	6,02	-3,72	42,22	1,62	0,68	4,85	6,47	5,53	3,23	4,17

Tabela 4.7 – Tabela de cálculo dos momentos fletores corrigidos no canto com bordo apoiado e bordo engastado.

Analizando os dados marcados na Tabela 4.7 e comparando-os com o momento resistente da armadura mínima, pode-se concluir que para os casos estudados onde o maior bordo é engastado, o momento resistente da armadura mínima cobre os momentos fletores corrigidos negativos e quando o menor bordo é engastado, a disposição da armadura complementar deve cobrir uma distância de $0,35l_x$.

4.4.2. Esforços solicitantes nas lajes.

O trio de momentos M_{11} , M_{22} e M_{12} , obtidos com auxílio do programa SAP2000, será utilizado na aplicação do método de Wood, gerando os momentos fletores corrigidos positivos M'_{11} e M'_{22} e os momentos fletores corrigidos negativos M''_{11} e M''_{22} .

Nas tabelas de cálculo de esforços solicitantes nas lajes, para cada tipo e proporção de vãos, os pontos onde ocorrem os máximos momentos fletores corrigidos positivos, negativos e nas regiões de canto, terão listados cada um seu trio de momentos fletores de origem (M_{11} , M_{22} e M_{12}) e seu valor corrigido (M_{COR}).

Com esses dados foram realizadas duas comparações. Na primeira avaliação é feita a comparação (M_{COR}/M'_{11}) que nos dará a proporção do momento fletor, nos pontos, em relação ao maior momento fletor do vão. Na segunda avaliação será feita a comparação (M/M_{COR}) que nos dará a proporção do momento fletor sem correção em relação ao momento corrigido.

Nos cantos do tipo C1, com bordos apoiados, ocorrem momentos fletores sem correção nulos e momentos volventes máximos, proporcionando a igualdade entre os momentos fletores corrigidos. Para representar os momentos fletores corrigidos nessa região foi criada a variável M_{C1} .

Um sistema de orientação cartesiana, com origem no canto superior esquerdo, foi adotado para localizar os pontos escolhidos na laje, ver Figura 4.10. Sua escala é adimensional, sendo $x=d_x/l_x$ e $y=d_y/l_y$.

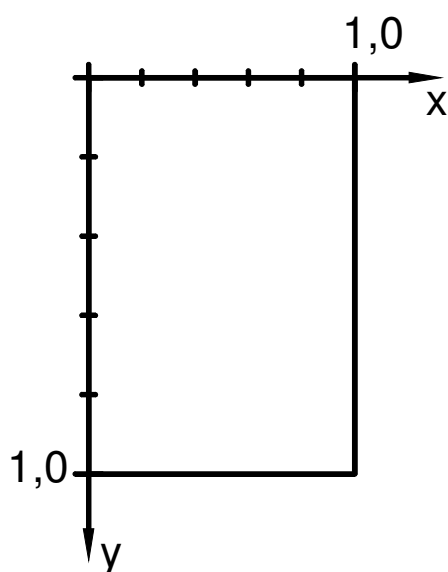


Figura 4.10 - Eixos de orientação cartesiana.

a) Laje Tipo 1

O estudo da laje maciça apoiada em quatro lados indeslocáveis é interessante, pois este é o caso onde a presença do momento volvente é mais evidente, devendo ser avaliada a necessidade da disposição de armadura de canto mesmo quando os esforços são calculados desprezando-se a contribuição do momento volvente.

LAJE TIPO 1 - 5,0 X 5,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,50	6,67	6,67	0,00	6,67	1,00	1,00
	M'_{22}	0,50	0,50	6,67	6,67	0,00	6,67	1,00	1,00
C1	M	0,00	0,00	0,00	0,00	5,37	5,37	0,81	0,00

LAJE TIPO 1 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,53	11,77	6,38	0,00	11,77	1,00	1,00
	M'_{22}	0,20	0,13	3,92	2,96	4,65	7,61	0,65	0,39
C1	M_{C1}	0,00	0,00	0,00	0,00	7,15	7,15	0,61	0,00

LAJE TIPO 1 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,50	15,04	5,49	0,00	15,04	1,00	1,00
	M'_{22}	0,20	0,90	4,16	2,84	5,64	8,49	0,56	0,33
C1	M_{C1}	0,00	0,00	0,08	0,06	7,71	7,63	0,51	0,00

Tabela 4.8 – Tabela comparativa do tipo 1.

Os momentos fletores de canto têm valor numérico expressivo, chegando a 81% de M'_{11} . A distribuição de 100% da armadura positiva do vão em toda a laje cobre as solicitações de canto positivas. Os momentos negativos de canto superam o momento resistido pela armadura mínima, sendo necessário o uso de armadura complementar.

Com a correção, o ponto onde ocorre o maior momento fletor positivo na direção do maior vão se desloca para o canto. Sem considerar a influência do volvente, o momento fletor corresponde apenas a 1/3 do momento fletor corrigido na relação de vão igual a 2.

b) Lajes Tipo 2 e 3

A característica das lajes maciças tipo 2 e 3 é a restrição das rotações e deslocamentos em um dos lados e ter os demais lados com rotação liberada.

LAJES TIPO 2 E 3 - 5,0 X 5,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,60	0,50	5,93	4,81	0,00	5,93	1,00	1,00
	M'_{22}	0,60	0,50	5,93	4,81	0,00	4,81	0,81	1,00
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,50	-12,44	-2,49	0,00	12,44	2,10	1,00
C1	M_{C1}	1,00	0,00	0,00	0,00	-4,41	4,41	0,74	0,00
C3	M'_{22}	0,30	0,10	1,11	1,67	2,62	4,29	0,72	0,39
	M''_{22}	0,20	0,00	0,00	0,00	3,10	3,10	0,52	0,00

LAJES TIPO 2 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,47	10,14	6,38	0,00	10,14	1,00	1,00
	M'_{22}	0,20	0,13	3,73	3,01	4,25	7,26	0,72	0,41
NEGATIVO	M''_{22}	0,50	1,00	-3,32	-16,61	0,00	16,61	1,64	0,20
C1	M_{C1}	0,00	0,00	0,00	0,00	6,70	6,70	0,66	0,00
C4	M'_{11}	0,20	0,73	4,36	2,37	-3,44	7,80	0,77	0,56
	M''_{11}	0,00	0,80	0,00	0,00	-4,75	4,75	0,47	0,00

LAJES TIPO 2 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,45	14,02	5,74	0,01	14,02	1,00	1,00
	M'_{22}	0,20	0,10	4,10	2,87	5,18	8,05	0,57	0,36
NEGATIVO	M''_{22}	0,50	1,00	-3,60	-17,98	0,01	17,99	1,28	0,20
C1	M_{C1}	0,00	0,00	0,08	0,06	7,56	7,49	0,53	0,01
C4	M'_{11}	0,20	0,85	3,20	0,73	4,58	7,78	0,55	0,41
	M''_{11}	0,00	0,85	-0,01	-0,05	5,46	5,47	0,39	0,00

LAJES TIPO 3 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,60	0,53	8,76	3,76	0,20	8,96	1,00	0,98
	M'_{22}	0,90	0,07	1,30	1,02	4,35	5,37	0,60	0,19
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,53	-16,50	-3,30	0,04	16,54	1,85	1,00
C1	M_{C1}	1,00	0,00	0,00	0,00	5,07	5,07	0,57	0,00
C3	M'_{22}	0,40	0,13	3,20	2,84	2,00	4,84	0,54	0,59
	M''_{22}	0,20	0,00	-0,02	0,00	3,48	3,48	0,39	0,00

LAJES TIPO 3 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,60	0,50	9,99	2,89	0,00	9,99	1,00	1,00
	M'_{22}	0,90	0,05	1,34	1,02	4,77	5,79	0,58	0,18
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,50	-18,03	-3,61	0,00	18,03	1,80	1,00
C1	M_{C1}	1,00	0,00	0,07	0,05	5,15	5,23	0,52	0,01
C3	M'_{22}	0,40	0,10	3,22	2,76	2,38	5,14	0,51	0,54
	M''_{22}	0,20	0,00	-0,10	-0,02	3,48	3,50	0,35	0,01

Tabela 4.9 – Tabela comparativa dos tipos 2 e 3.

Nas lajes tipo 2 e 3 com dimensões de 5,0x5,0 o momento fletor no canto C1 tem valor numérico expressivo, chegando a 74% de M'_{11} e seu valor supera o momento resistente da armadura mínima, sendo necessário o uso de armadura complementar. No canto C3 não existe a necessidade armadura complementar, já que seu momento fletor negativo não supera o momento fletor resistente pela armadura mínima.

Nas lajes tipo 2 com dimensões de 5,0x7,5 e de 5,0x10,0 o momento fletor no canto C1 tem valor numérico expressivo, chegando a 66% e 53% de M'_{11} e seu valor supera o momento resistido pela armadura mínima, sendo necessário o uso de armadura complementar. No canto C4 existe a necessidade armadura complementar, pois o momento fletor negativo supera o momento fletor resistido pela armadura mínima. Com a correção, o maior momento fletor positivo na direção do maior vão se desloca para o canto. Sem se considerar a influência do volvente o momento fletor corresponde apenas a 41% e 36% do momento fletor corrigido, respectivamente.

Nas lajes tipo 3 com dimensões de 5,0x7,5 e 5,0x10,0 o momento fletor no canto C1 tem valor numérico expressivo, chegando a 57% e 52% de M'_{11} e seu valor supera o momento resistido pela armadura mínima, sendo necessário o uso de armadura complementar. No canto C3 não existe a necessidade armadura complementar, pois seu momento fletor negativo não supera o momento fletor resistente pela armadura mínima. Com a correção, o ponto onde ocorre o maior momento fletor positivo na direção do maior vão se desloca para o canto. Sem

considerar a influência do volvente os momentos fletores correspondem apenas a 19% e 18% do momento fletor corrigido, respectivamente.

Para todas as lajes dos tipos 2 e 3 a distribuição de 100% da armadura positiva do vão em toda a laje cobre as solicitações de canto positivas.

c) Lajes Tipo 4 e 5

A característica das lajes maciças tipo 4 e 5 é a restrição das rotações e deslocamentos em dois lados opostos e ter os demais lados com rotação liberada.

LAJES TIPO 4 E 5 - 5,0 X 5,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,50	4,89	3,30	0,00	4,89	1,00	1,00
	M'_{22}	0,50	0,50	4,89	3,30	0,00	3,30	0,67	1,00
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,50	-10,39	-2,08	0,00	10,39	2,12	1,00
C3	M'_{22}	0,30	0,20	2,06	2,09	1,51	3,60	0,74	0,58
	M''_{22}	0,20	0,00	0,00	0,00	2,43	2,43	0,50	0,00

LAJES TIPO 4 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,53	8,36	6,17	0,00	8,36	1,00	1,00
	M'_{22}	0,50	0,53	8,36	6,17	0,00	6,17	0,74	1,00
NEGATIVO	M''_{22}	0,50	0,00	-3,11	-15,57	0,00	15,57	1,86	1,00
C4	M'_{11}	0,20	0,27	4,07	2,54	2,95	7,02	0,84	0,58
	M''_{11}	0,00	0,20	0,00	0,00	4,25	4,25	0,51	0,00

LAJES TIPO 4 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,50	12,79	5,91	0,00	12,79	1,00	1,00
	M'_{22}	0,30	0,30	8,65	4,37	2,40	6,77	0,53	0,65
NEGATIVO	M''_{22}	0,50	0,00	-3,53	-17,64	0,01	17,65	1,38	1,00
C4	M'_{11}	0,20	0,15	3,16	0,82	4,43	7,59	0,59	0,42
	M''_{11}	0,00	0,15	-0,01	-0,05	5,30	5,31	0,42	0,01

LAJES TIPO 5 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,53	6,14	2,12	0,00	6,14	1,00	1,00
	M'_{22}	0,30	0,13	2,06	1,88	1,66	3,54	0,58	0,53
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,53	-12,22	-2,44	0,02	12,24	1,99	1,00
C3	M'_{22}	0,30	0,13	2,06	1,88	1,66	3,54	0,58	0,53
	M''_{22}	0,20	0,00	0,00	0,00	2,50	2,50	0,41	0,00

LAJES TIPO 5 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,50	6,43	1,51	0,00	6,43	1,00	1,00
	M'_{22}	0,30	0,10	2,05	1,87	1,88	3,93	0,61	0,48
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,50	-12,54	-2,51	0,00	12,54	1,95	1,00
C3	M'_{22}	0,30	0,10	2,05	1,87	1,88	3,75	0,58	0,50
	M''_{22}	0,30	0,00	-0,04	-0,01	2,23	2,27	0,35	0,00

Tabela 4.10 – Tabela comparativa dos tipos 4 e 5.

Nas lajes tipo 4 com dimensões de 5,0x5,0 e nas lajes tipo 5 no canto C3 não existe a necessidade armadura complementar, já que seu momento fletor negativo não supera o momento fletor resistido pela armadura mínima.

Nas lajes tipo 4 com dimensões de 5,0x7,5 e 5,0x10,0 no canto C4 existe a necessidade armadura complementar, pois seu momento fletor negativo supera o momento fletor resistente pela armadura mínima.

Nas lajes tipo 4 com dimensões de 5,0x10,0 e tipo 5 com dimensões de 5,0x7,5 e de 5,0x10,0 com a correção, o ponto onde ocorre o maior momento fletor positivo na direção do maior vão se desloca para o canto. Sem considerar a influência do volvente, os momentos fletores correspondem apenas a 65%, 53% e 48% do momento fletor corrigido, respectivamente.

Para todas as lajes dos tipos 4 e 5 a distribuição de 100% da armadura positiva do vão em toda a laje cobre as solicitações de canto positivas.

d) Laje Tipo 6

São lajes maciças com liberdade de movimento de dois lados adjacentes restrita a rotações e deslocamentos e com os demais lados com rotação liberada.

LAJES TIPO 6 - 5,0 X 5,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,70	0,30	4,05	4,05	0,68	4,73	1,00	0,86
	M'_{22}	0,70	0,30	4,05	4,05	0,68	4,73	1,00	0,86
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,40	-10,25	-2,05	0,06	10,31	2,18	0,99
	M''_{22}	0,60	1,00	-2,05	-10,25	0,06	10,31	2,18	-0,99
C1	M_{C1}	1,00	0,00	0,00	0,00	3,88	3,88	0,82	0,00
C3	M'_{22}	0,30	0,10	1,08	1,73	2,24	1,16	0,25	1,49
	M''_{22}	0,20	0,00	0,00	0,00	2,74	2,74	0,58	0,00
C4	M'_{11}	0,9	0,7	1,73	1,08	2,24	3,97	0,84	0,44
	M''_{11}	1	0,8	0	0	2,74	2,74	0,58	0,00

LAJES TIPO 6 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,60	0,40	7,90	4,05	0,04	7,94	1,00	0,99
	M'_{22}	0,90	0,07	1,28	1,03	4,24	5,27	0,66	0,20
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,47	-15,47	-3,09	0,03	15,50	1,95	1,00
	M''_{22}	0,60	1,00	-2,36	-11,81	0,05	11,86	1,49	-1,00
C1	M_{C1}	1,00	0,00	0,00	0,00	4,96	4,96	0,62	0,00
C3	M'_{22}	0,40	0,13	3,17	2,91	1,91	4,82	0,61	0,60
	M''_{22}	0,20	0,00	0,00	0,00	3,42	3,42	0,43	0,00
C4	M'_{11}	0,80	0,80	3,00	1,29	2,49	5,49	0,69	0,55
	M''_{11}	1,00	0,87	0,00	0,00	3,47	3,47	0,44	0,00

LAJES TIPO 6 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,60	0,45	9,68	3,10	0,01	9,69	1,00	1,00
	M'_{22}	0,80	0,10	3,55	2,38	3,35	5,73	0,59	0,42
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,45	-17,64	-3,53	0,00	17,64	1,82	1,00
	M''_{22}	0,60	1,00	-2,40	-11,99	0,06	12,05	1,24	-0,99
C1	M_{C1}	1,00	0,00	0,07	0,05	5,14	5,07	0,52	0,01
C3	M'_{22}	0,40	0,10	3,22	2,78	2,37	5,14	0,53	0,54
	M''_{22}	0,20	0,00	-0,10	-0,02	3,47	3,50	0,36	-0,01
C4	M'_{11}	0,80	0,85	3,06	1,16	2,87	5,93	0,61	0,52
	M''_{11}	1,00	0,85	-0,01	-0,03	3,67	3,64	0,38	0,00

Tabela 4.11 – Tabela comparativa dos tipos 6.

Nas lajes tipo 6, o momento fletor no canto C1 tem valor numérico expressivo, chegando a 82% de M'_{11} e seu valor supera o momento resistido pela armadura mínima, sendo necessário o uso de armadura complementar. Nos cantos C3 e C4 não existe a necessidade armadura complementar. Seu momento fletor negativo não supera o momento fletor resistido pela armadura mínima.

Na laje 5,0x5,0 o ponto onde ocorre máximo fletor positivo está sob influência de momento torçor e a relação entre o seu valor e o valor corrigido é de 86%. Para as relações de vão 5,0x7,5 e 5,0x10,0 com a correção, o ponto onde ocorre o maior momento fletor positivo na direção do maior vão se desloca para o canto. Sem considerar a influência do volvente, o momento fletor corresponde apenas a 20% e 42% do momento fletor corrigido, respectivamente.

Para todas as lajes do tipo 6 a distribuição de 100% da armadura positiva do vão em toda a laje cobre as solicitações de canto positivas.

e) Lajes Tipo 7 e 8

São lajes maciças com liberdade de movimento de três lados restrita a rotações e deslocamentos e com o outro lado com rotação liberada.

LAJES TIPO 7 E 8 - 5,0 X 5,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,40	4,10	3,45	0,00	4,10	1,00	1,00
	M'_{22}	0,50	0,40	4,10	3,45	0,00	3,45	0,84	1,00
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,40	-9,07	-1,81	0,05	9,12	2,22	0,99
	M''_{22}	0,50	1,00	-1,63	-8,16	0,00	8,16	1,99	1,00
C3	M'_{22}	0,30	0,10	1,16	1,57	1,69	3,26	0,80	0,48
	M''_{22}	0,2	0	0	0	2,28	2,28	0,56	0,00

LAJES TIPO 7 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,60	0,47	7,13	4,13	0,04	7,17	1,00	0,99
	M'_{22}	0,70	0,33	5,78	3,41	-0,91	4,32	0,60	0,79
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,47	-14,05	-2,81	0,06	14,11	1,97	1,00
	M''_{22}	0,60	1,00	-2,31	-11,54	0,05	11,59	1,62	1,00
C4	M'_{11}	0,80	0,20	2,91	1,39	-2,30	5,21	0,73	0,56
	M''_{11}	1,00	0,20	0,00	0,00	-3,20	3,20	0,45	0,00

LAJES TIPO 7 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,60	0,50	9,26	3,32	0,01	9,27	1,00	1,00
	M'_{22}	0,80	0,80	4,28	1,99	2,62	4,61	0,50	0,43
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,50	-17,08	-3,42	0,00	17,08	1,84	1,00
	M''_{22}	0,60	1,00	-2,39	-11,96	0,06	12,02	1,30	0,99
C4	M'_{11}	0,80	0,15	3,05	1,18	2,78	5,83	0,63	0,52
	M''_{11}	1,00	0,15	-0,01	-0,03	3,65	3,66	0,39	0,00

LAJES TIPO 8 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,47	5,89	2,34	0,01	5,90	1,00	1,00
	M'_{22}	0,70	0,13	2,06	1,91	-1,87	3,78	0,64	0,50
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,47	-11,86	-2,37	-0,02	11,87	2,01	1,00
	M''_{22}	0,50	1,00	-1,69	-8,44	0,01	8,45	1,43	1,00
C3	M'_{22}	0,40	0,13	2,94	2,42	1,19	3,61	0,61	0,67
	M''_{22}	0,20	0,00	0,04	0,00	2,46	2,46	0,42	0,00

LAJES TIPO 8 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,45	6,37	1,64	0,00	6,37	1,00	1,00
	M'_{22}	0,30	0,10	2,05	1,87	1,88	3,75	0,59	0,50
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,45	-12,48	-2,50	0,00	12,48	1,96	1,00
	M''_{22}	0,50	1,00	-1,68	-8,39	0,01	8,41	1,32	1,00
C3	M'_{22}	0,30	0,10	2,05	1,87	1,88	3,75	0,59	0,50
	M''_{22}	0,20	0,00	-0,09	-0,02	2,52	2,54	0,40	0,01

Tabela 4.12 – Tabela comparativa dos tipos 7 e 8

Nas lajes tipo 7 e 8 nos cantos C3 e C4 não existe a necessidade armadura complementar, pois seus momentos fletores negativos não superam o momento fletor resistido pela armadura mínima.

Para as relações de vão 5,0x7,5 e 5,0x10,0 com a correção, o ponto onde ocorre maior momento fletor positivo na direção do maior vão se desloca para o canto. Sem considerar a influência do volvente, os momentos fletores correspondem apenas a 79% e 43% do momento fletor corrigido respectivamente para as lajes do tipo 7 e 50% do momento fletor corrigido para as lajes do tipo 8.

Para todas as lajes dos tipos 7 e 8 a distribuição de 100% da armadura positiva do vão em toda a laje cobre as solicitações de canto positivas.

f) Laje Tipo 9

São lajes maciças com liberdade de movimento restrita a rotações e deslocamentos nos quatro lados.

LAJES TIPO 9 - 5,0 X 5,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,50	3,30	3,30	0,00	3,30	1,00	1,00
	M'_{22}	0,50	0,50	3,30	3,30	0,00	3,30	1,00	1,00
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,50	-7,64	-1,53	0,00	7,64	2,32	1,00
	M''_{22}	0,50	0,00	-1,53	-7,64	0,00	7,64	2,32	1,00

LAJES TIPO 9 - 5,0 X 7,5									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,47	5,50	2,58	0,03	5,53	1,00	1,00
	M'_{22}	0,60	0,27	3,56	2,14	0,88	3,02	0,55	0,71
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,47	-11,25	-2,25	0,04	11,29	2,04	1,00
	M''_{22}	0,50	0,00	-1,68	-8,42	0,01	8,43	1,53	1,00

LAJES TIPO 9 - 5,0 X 10,0									
TIPO DE MOMENTO	$M_{MÁX}$	POSIÇÃO		M_{11} (kN.m)	M_{22} (kN.m)	M_{12} (kN.m)	$ M_{COR.} $ (kN.m)	M_{COR}/M'_{11}	M/M_{COR}
		X	Y						
POSITIVO	M'_{11}	0,50	0,50	6,27	1,78	0,00	6,27	1,00	1,00
	M'_{22}	0,40	0,20	3,57	1,99	0,92	2,91	0,46	0,68
NEGATIVO	M''_{11}	0,00	0,50	-12,35	-2,47	0,00	12,35	1,97	1,00
	M''_{22}	0,50	0,00	-1,68	-8,40	0,01	8,41	1,34	1,00

Tabela 4.13 – Tabela comparativa do tipo 9.

Nas lajes tipo 9 para os vãos 5,0x7,5 e 5,0x10,0 com a correção, o ponto onde ocorre maior momento fletor positivo na direção do maior vão se desloca para o canto. Sem considerar a influência do volvente os momentos fletores correspondem apenas a 71% e 69% do momento fletor corrigido, respectivamente.

4.5. Dimensionamento da Armadura de Flexão

Com os momentos fletores corrigidos, será realizado o dimensionamento da área de armadura em cada ponto. As áreas das armaduras encontradas devem ser iguais ou superiores às armaduras mínimas.

Cada laje modelada terá quatro gráficos, um para cada momento fletor corrigido M'_{11} , M'_{22} , M''_{11} e M''_{22} . Esses gráficos podem auxiliar no detalhamento, onde sua representação em forma de círculos, em cada ponto, cresce de acordo com a necessidade de armadura. Nas armaduras negativas, quando o valor da armadura mínima é superado, a representação passa a ser um contorno de círculo. Os gráficos têm o mesmo sistema de coordenadas definido no item 4.4.2 e serão apresentados no Anexo 1.

O modelo de cálculo empregado considera os domínios de deformação definidos pela NBR6118:2007.

Em se tratando de dimensionamento à flexão simples foram considerados apenas os domínios 2 e 3 de deformação.

Os cálculos foram realizados a partir de tabelas utilizando a formulação de dimensionamento com o fator K_{md} [4]:

$$K_{md} = \frac{\gamma_f \cdot M_k}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot K_{md}}{0,85}}}{0,8}$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x$$

$$A_s = \frac{\gamma_f \cdot M_k}{k_z \cdot d \cdot f_{yd}}$$

A altura útil da seção foi definida considerando que no detalhamento serão utilizadas barras de até 12,5mm em uma camada e cobrimento nominal de 25mm, resultando em:

$$d = h - c_{\text{nom.}} - \frac{\phi}{2} = 0,06875 \cong 0,07\text{m}$$

4.6. Recomendações de Detalhamento de Armadura

4.6.1. Recomendações gerais

O arranjo das armaduras deve atender não somente à sua função estrutural, como também às condições adequadas de execução, tendo em vista particularmente o lançamento e o adensamento do concreto. Espaços adequados devem ser previstos para a introdução dos vibradores, de modo a impedir a segregação dos agregados e a formação de vazios no concreto estrutural. As armaduras devem ser dispostas de forma a que se possa garantir o seu posicionamento durante a concretagem.

Segundo a NBR 6118:2007, item 20.1, na região de momentos máximos, o espaçamento das armaduras não deve exceder $2h$ ou 20 cm. O diâmetro das barras não deve exceder $h/8$.

A NBR 6118:2007 estabelece taxas mínimas de armadura de flexão (ρ_{min}) para peças fletidas com diversas formas de seção e diversos valores de f_{ck} em sua Tabela 17.3.

Para melhorar o desempenho e a ductilidade à flexão, assim como controlar a fissuração, são necessários valores mínimos de armadura, definidos pela NBR 6118:2007, na Tabela 19.1. Essa armadura deve ser constituída preferencialmente por barras com alta aderência ou por telas soldadas.

Nos apoios de lajes que não apresentem continuidade com planos de lajes adjacentes e que tenham ligação com os elementos de apoio, deve-se dispor de armadura de borda que atenda aos valores mínimos dados na Tabela 19.1 da NBR 6118:2007. Essa armadura deve se estender até pelo menos 0,25 do vão menor da laje a partir da face do apoio.

Forma da seção	Valores de $\rho_{min}^{1)} (A_{s,min}/A_c)$ %								
	ω_{min}	f_{ck}	20	25	30	35	40	45	50
Retangular		0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288
T (mesa comprimida)		0,024	0,150	0,150	0,150	0,150	0,158	0,177	0,197
T (mesa tracionada)		0,031	0,150	0,150	0,153	0,178	0,204	0,229	0,255
Circular		0,070	0,230	0,288	0,345	0,403	0,460	0,518	0,575

¹⁾ Os valores de ρ_{min} estabelecidos nesta tabela pressupõem o uso de aço CA-50, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$. Caso esses fatores sejam diferentes, ρ_{min} deve ser recalculado com base no valor de ω_{min} dado.

NOTA - Nas seções tipo T, a área da seção a ser considerada deve ser caracterizada pela alma acrescida da mesa colaborante.

Figura 4.11 – Tabela 17.3 -Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas e lajes [9].

Armadura	Elementos estruturais sem armaduras ativas	Elementos estruturais com armadura ativa aderente	Elementos estruturais com armadura ativa não aderente
Armaduras negativas	$\rho_s \geq \rho_{min}$	$\rho_s \geq \rho_{min} - \rho_p \geq 0,67\rho_{min}$	$\rho_s \geq \rho_{min} - 0,5\rho_p \geq 0,67\rho_{min}$ (ver item 19.3.3.2)
Armaduras positivas de lajes armadas nas duas direções	$\rho_s \geq 0,67\rho_{min}$	$\rho_s \geq 0,67\rho_{min} - \rho_p \geq 0,5\rho_{min}$	$\rho_s \geq \rho_{min} - 0,5\rho_p \geq 0,5\rho_{min}$
Armadura positiva (principal) de lajes armadas em uma direção	$\rho_s \geq \rho_{min}$	$\rho_s \geq \rho_{min} - \rho_p \geq 0,5\rho_{min}$	$\rho_s \geq \rho_{min} - 0,5\rho_p \geq 0,5\rho_{min}$
Armadura positiva (secundária) de lajes armadas em uma direção	$A_s/s \geq 20\%$ da armadura principal $A_s/s \geq 0,9\text{ cm}^2/\text{m}$ $\rho_s \geq 0,5\rho_{min}$		-

Onde:
 $\rho_s = A_s/b_w h$ e $\rho_p = A_p/b_w h$.
 NOTA - Os valores de ρ_{min} constam na tabela 17.3.

Figura 4.12 – Tabela 19.1 - Valores mínimos para armaduras passivas aderentes.[9]

Segundo o item 17.5.2.4, da NBR 6118:2007 a soma das armaduras de tração e de compressão ($A_s + A_s'$) não deve ter valor maior que 4% A_c , calculada em região fora da zona de emendas.

4.6.2. Armadura inferior.

Nas lajes sem armadura de cisalhamento, seu mecanismo de resistência à flexão é em forma de arco atirantado, portanto a armadura longitudinal de flexão deve ser levada integralmente aos apoios.

Como foram mostrados, nos estudos realizados neste trabalho, os momentos fletores corrigidos tem valores próximos no vão e nos cantos, não fazendo sentido a consideração de escalonamento das armaduras positivas.

4.6.3. Armadura superior.

Nas lajes com engastamento perfeito ou no caso de lajes contínuas deve ser prevista armadura negativa. Na falta de análise mais rigorosa, recomenda-se que a região a ser coberta pela armadura negativa deva ser no mínimo 0,25 do maior dos dois vãos menores, a partir da face do apoio.

Nos cantos de laje com dois bordos apoiados, tipo C1, deve ser prevista armadura complementar, de forma a se ter armadura total com o mesmo valor da armadura no vão. Recomenda-se que a região a ser coberta pela armadura negativa deva ser de no mínimo 0,25 do menor vão, a partir da face do apoio.

Nos cantos de laje com os dois bordos engastados, tipo C2, e com o maior bordo engastado e o menor apoiado, tipo C3, a armadura mínima negativa resiste aos esforços, nos casos aqui estudados.

Nos cantos de laje com o maior bordo apoiado e o menor engastado, tipo C4, deve ser prevista armadura complementar, para que se obtenha 60% do valor da armadura no vão. Recomenda-se que a região a ser coberta pela armadura negativa deva ser de 0,35 do menor vão, a partir da face do apoio.

5. Conclusão

No estudo realizado no presente trabalho chegou-se a conclusão, por meio de modelos matemáticos baseado no método de elementos finitos e de algoritmos de correção de momentos fletores em direções oblíquas, da importância da consideração do momento volvente no dimensionamento da armadura em lajes de concreto armado.

Os esforços solicitantes obtidos pelas tabelas de Czerny, quando comparados com os obtidos pelo modelo de elementos finitos, se mostraram próximos, quando negativos, cerca de 80% para os positivos na direção do menor vão e muito distantes para os momentos positivos na direção do maior vão, possivelmente influenciados pelo fato das tabelas utilizarem coeficiente de Poisson igual a 0,0 e o modelo ter sido analisado como linear elástico com Poisson igual a 0,2.

Observou-se que ao fazer a correção dos momentos fletores nas direções das armaduras, nos pontos da laje onde a influência dos momentos torçores eram maiores, mais significativos ficavam os esforços corrigidos.

Os momentos fletores positivos do menor vão, para qualquer relação de vão, e os momentos fletores positivos do maior vão, quando a relação era igual a 1, foram os únicos esforços que não sofreram grande influência, pois ocorriam em regiões de momento torçor praticamente nulo.

Os máximos momentos fletores positivos, com relação de vão diferente de 1, sofreram correção e passaram a ocorrer em região afastada do centro, próximos aos cantos. Na laje tipo 3 com relação de vão igual a 2, a proporção entre o momento fletor sem a correção com o corrigido chegou a 18%.

As regiões de canto foram as que mais sofreram influência do momento torçor, configurados como momento volvente.

Nos cantos do tipo C1, com bordos apoiados, as solicitações dos momentos fletores corrigidos chegaram a 81% da armadura do vão, na laje tipo 1 com relação de vão igual a 1, sendo recomendado utilizar acréscimo de a armadura para se obter a mesma área de armadura do vão, cobrindo a região de 0,25 do menor vão.

Nos cantos do tipo C2, com bordos engastados, a armadura calculada para o momento fletor negativo cobre a influência do momento torçor que ocorre um pouco afastado do canto.

Nos cantos do tipo C3, com o maior bordo engastado e o menor bordo apoiado, não se tem necessidade de acréscimo de armadura, pois a armadura mínima posicionada para combater o engastamento elástico da laje com a viga resiste ao seu acréscimo de solicitações.

Nos cantos do tipo C4, com o maior bordo apoiado e o menor bordo engastado, as solicitações dos momentos fletores corrigidos chegam a 58% da armadura do vão, na laje tipo 6 com relação de vão igual a 1. É recomendado utilizar acréscimo de armadura para que se obtenha 60% armadura do vão, cobrindo a região de 0,35 do menor vão.

Apesar de o trabalho ter tratado de um caso específico de lajes de edifício, com formato retangular, com todos os bordos engastados e ou apoiados, carregamento uniformemente distribuído e análise linear elástica, foi possível notar a importante influência da consideração do momento torçor no acréscimo da armadura.

A continuação deste trabalho pode ser desenvolvida para casos de bordos livres, outros tipos de carregamento, estudo de deformações e análise elastoplástica das linhas de ruptura.

Referências e Bibliografia:

- [1] **WOOD, R. H.**, The reinforcement of slabs in accordance with a predetermined field of moments. *Concrete Magazine*, London, February 1968.
- [2] **CZERNY, F.**, Tafeln für gleichmässig vollbelastete Rechteckplatten – Beton Kalender 1958.
- [3] **SANTOS, S. H. C.**, Concreto Armado I. Escola Politécnica – UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2010.
- [4] **DIAZ, B. E.**, Tabela de dimensionamento com bloco retangular de tensões, Escola Politécnica – UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [5] **LEONHARDT, F. e MÖNNIG, E.**, Construções de Concreto, Volume 3, Editora Interciência, Rio de Janeiro, Brasil, 1978.
- [6] **LEONHARDT, F. e MÖNNIG, E.**, Construções de Concreto, Volume 2, Editora Interciência, Rio de Janeiro, Brasil, 1978.
- [7] **SAP2000 12.0.0**, Computer and Structures, Inc. <http://www.csiberkeley.com/>
- [8] **IBRACON**, Instituto Brasileiro do Concreto, “Comentários Técnicos e Exemplos de Aplicação da NB1 – NBR6118:2003 – Procedimento”, São Paulo, IBRACON, 2007.

Normas Técnicas:

- [9] **ABNT NBR 6118:2007** – Projeto de estruturas de concreto armado – Procedimento.
- [10] **ABNT NBR 6120:1980** – Cargas para cálculo de estruturas de edificações
- [11] **ABNT NBR 8681:2003** – Ações e segurança nas estruturas – Procedimento.

Anexo 1

